СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

под редакцией
Д. В. СИВУХИНА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

530.3
С 23
УДК 530.10

Авторы:

В. Л. ГИНЗБУРГ, Л. М. ЛЕВИН, Д. В. СИВУХИН,
И. А. ЯКОВЛЕВ

С $\frac{20401-115}{053(02)-76}$ 95-76

СОДЕРЖАНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Скорость света	$2,99792458 \cdot 10^{8}$ м/с $=$ $=2,99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Заряд электрона	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4,80 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ
Постоянная Планка	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $=$ $=6,626 \cdot 10^{-27}$ эрг·с
Число Авогадро	$6,022 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$ $=$ $=6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $= 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К
Газовая постоянная	$8,31 \cdot 10^{3}$ Дж/(кмоль·К) $=$ $=8,31 \cdot 10^{7}$ эрг/(моль·К)
Гравитационная постоянная	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 $=$ $=6,67 \cdot 10^{-8}$ дин·см^2/г^2
Число Фарадея	$9,648 \cdot 10^{7}$ Кл/кмоль $=$ $=9,648 \cdot 10^{3}$ СГСМ/моль
Масса покоя электрона	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг $= 9,11 \cdot 10^{-28}$ г
Масса покоя протона	$1,6727 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1,6727 \cdot 10^{-24}$ г
Масса покоя нейтрона	$1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1,6750 \cdot 10^{-24}$ г
Средний радиус Земли	6371 км
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Средняя плотность Земли	5,52 г/см^3
Момент количества движения Земли, связанный с осевым вращением	$5,91 \cdot 10^{33}$ кг·м^2/с
Средняя скорость движения Земли по орбите	29,77 км/с
Радиус Солнца	$6,96 \cdot 10^{8}$ км
Масса Солнца	$1,99 \cdot 10^{30}$ кг
Средняя плотность Солнца	1,41 г/см^3
Среднее расстояние Земли от Солнца	$1,496 \cdot 10^{8}$ км
Среднее расстояние Луны от Земли	$3,84 \cdot 10^{5}$ км
Средний радиус Луны	1738 км
Масса Луны	$7,34 \cdot 10^{22}$ кг

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании раздел термодинамики и молекулярной физики задачника выходит отдельной книгой. По сравнению с предыдущим изданием объем этого раздела увеличился примерно вдвое. К авторскому коллективу присоединился И. А. Яковлев, предложивший 57 задач. Несколько задач представлено В. Л. Гинзбургом. Задачи 37, 131, 189, 338, 416 отобраны из материалов, присланных профессором Оксфордского университета тер Хаaром во время подготовки английского издания этого задачника. Остальные задачи добавлены мною, часть их заимствована (часто в переработанном виде) из второго тома моего «Общего курса физики». Другие задачи публикуются впервые. Многие из них предлагались студентам Московского физико-технического института. Идеи некоторых из этих задач принадлежат преподавателям кафедры физики того же института. Всем лицам, способствовавшим улучшению и пополнению этого труда, авторский коллектив задачника приносит глубокую благодарность.

Весь текст задачника заново просмотрен мною, а расположение задач стало более логичным и систематичным. В книге принята сквозная нумерация формул для каждой задачи, причем начало нумерации может быть дано в условии задачи, а продолжение — в ответе (например, формулы (269.1)—(269.3) приведены в условии задачи 269, а формулы (269.4)—(269.6) — в ответе к этой задаче).

Задачник рассчитан на студентов и преподавателей физических факультетов университетов, физико-технических институтов и всех прочих высших учебных заведений, где физика является основной дисциплиной. По степени трудности задачи охватывают широкий диапа-

зон — от самых легких до задач, стоящих на уровне оригинальных научных работ.

Авторы выражают глубокую благодарность заведующему кафедрой общей физики Киргизского государственного университета доценту Дж. И. Ибраимову, заведующему кафедрой физики твердого тела профессору Л. В. Тузову, доценту той же кафедры П. М. Козлову и другим сотрудникам обеих кафедр за внимательный просмотр рукописи, ценные замечания и рецензирование нового издания нашего сборника задач.

Д. В. Сивухин

ЗАДАЧИ

§ 1. Температура. Термические свойства тел

1. В 1829 г. во Флоренции был случайно найден ящик, наполненный термометрами флорентийских академиков (1660 г.) со шкалами в 50 °Фл (флорент). Оказалось, что 50 °Фл соответствуют 44 °R и 0 °Фл = —15 °R. Найти выражение для перевода шкалы флорентийских градусов в градусы Цельсия.

2. Член С.-Петербургской Академии наук И. Н. Делиль в 1733 г. описал свою термометрическую шкалу. В качестве термометрического тела он применял ртуть и принимал за нуль температуры температуру кипящей воды. Объем ртути при этой точке он делил на 100 000 частей (большой термометр) и на 10 000 (малый) и наносил соответственные деления на шкалу; оказалось, что ртуть маленького термометра в тающем льде опустилась до 150-го деления. Найти выражения для перевода градусов Делиля (малый термометр) в градусы Цельсия.

3. Академику С.-Петербургской Академии наук И. Брауну 25 декабря 1759 г. впервые удалось заморозить ртуть при морозе на улице в 199 °D (т. е. по шкале Делиля, см. предыдущую задачу). Об этом Б. Н. Меншуткин в своей книге «М. В. Ломоносов» пишет:

«Погруженный в холодильную смесь ртутный термометр был разбит, и Браун впервые получил шарик твердой ртути. Она оказалась мягкой, как свинец, и похожей на полированное серебро. 26 декабря опыты продолжались уже вместе с Ломоносовым; мороз все крепчал и к 10 часам утра 26 декабря достиг 212 °D ... В холодную смесь из снега, крепкой водки (азотной кислоты) и купоросного масла (серной кислоты) был помещен ртутный термометр. Дальнейший ход опытов Ломоносов описывает так: „Не сомневаясь, что она уже замерзла, вскоре ударил я по шарику медным, при том бывшим циркулом, от чего тотчас стеклянная скорлупа

расшиблась, и от ртутной пули отскочила, которая осталась с хвостиком бывшия в трубке термометра достальные ртути, наподобие чистой серебряной проволоки, которая как мягкой металл свободно нагибалась, будучи толщиною в четверть линии. Ударив по ртутной пуле после того обухом, почувствовал я, что она имеет твердость, как свинец или олово. От первого удара, даже до четвертого, стискивалась она без седин, а от пятого, шестого и седьмого удара появились щели... И так перестав больше ртуть ковать, резать стал ножом, и по времени около 20 минут стала она походить на амальгаму или на тесто, и вскоре получила потерянную свою жидкость, то есть растопилась при таком великом морозе в 208 градусов"».

Найдите из опытов М. В. Ломоносова температуру замерзания ртути в градусах Цельсия.

4. Термометр в тающем льде показывает температуру t_0, в парах воды, кипящей при давлении H мм рт. ст.,— t_H. Найти выражение истинной температуры t при любом промежуточном показании термометра $t_п$ в предположении, что трубка термометра делится линиями шкалы на равные объемы. Температура кипения воды при давлении H мм рт. ст. равна T_H.

5. Термометр в тающем льде показывает $t_0=-3{,}0$ град, в парах кипящей при давлении $H=760$ мм рт. ст. воды — $t_H=101{,}4$ град. Какую температуру $t_п$ покажет термометр в парах кипящего метилового спирта ($t = 66{,}9$ °С)?

6. Два совершенно одинаковых термометра наполнены при 0 °С равными по объему количествами ртути и толуола. Найти отношение длины l деления, соответствующего 1 градусу, на шкале ртутного термометра, к длине l_1 деления на шкале толуолового термометра. Коэффициент объемного расширения ртути α, толуола α_1, коэффициент линейного расширения стекла β.

7. Разобрать, как будет вести себя при разных температурах от 0 до 10 °С термометр, наполненный водой. Для каких температур показания этого термометра будут одинаковыми? Для объема воды в зависимости от температуры можно принять формулу

$$V=1-0{,}00006105t+0{,}000007733t^2,$$

где V — объем при температуре t. Объем при 0 °С принят за единицу.

8. Водородный термометр с постоянным объемом V_0 при нагревании от $t_0=0$ °С до t_1 изменяет давление от P_0 до

P_1 мм рт. ст. Определить температуру газа t_i, если коэффициент объемного расширения сосуда α_0, водорода α.

9. Термометр, погруженный в воду массы $m=6{,}7$ г, повысил свою температуру на $\Delta t=14{,}6$ °С и показывает температуру $t=32{,}4$ °С. Какова температура воды x перед измерением. Водяной эквивалент термометра $k=0{,}46$ кал/°С[1]).

10. Температурная шкала газового термометра обычно строится таким образом, что равным приращениям объема или давления термометрического тела соответствуют равные приращения температуры. Дальтон (1802 г.) предложил иную шкалу, в которой равным приращениям температуры соответствуют равные относительные приращения объема идеального газа при постоянном давлении. В дальтоновой шкале, как и в шкале Цельсия, за нуль температуры принимается температура тающего льда, а температура паров кипящей при нормальном давлении воды принята за 100 °С. Выразить температуру τ по дальтоновой шкале через температуру t по шкале Цельсия.

11. Для измерения температуры термостата применили железную проволочку, имеющую при температуре 18 °С сопротивление 15 Ом. В термостате ее сопротивление оказалось равным 18,25 Ом. Определить температуру термостата t, если температурный коэффициент сопротивления железа $\varkappa=0{,}006$ °С$^{-1}$.

12. Сопротивление линейного болометра из зачерненной платиновой полоски $R=108$ Ом. С какой точностью можно производить измерения температур при помощи такого болометра, если все сопротивления определяются с точностью $\Delta R=0{,}001$ Ом, а температурный коэффициент сопротивления платины $\varkappa=0{,}0039$ °С$^{-1}$?

13. Объемное расширение ртути между 0 и 100 °С описывается уравнением $V=V_0(1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)$, где коэффициенты $\alpha_1=1{,}82\cdot10^{-4}$ °С$^{-1}$, $\alpha_2=7{,}8\cdot10^{-9}$ °С$^{-2}$, а линейное расширение стекла в том же температурном интервале — уравнением $l=l_0(1+\beta_1 t+\beta_2 t^2)$, где $\beta_1=8\cdot10^{-6}$ °С$^{-1}$, $\beta_2=3{,}5\cdot10^{-9}$ °С$^{-2}$. Найти связь между температурой t и температурой Θ по шкале ртутного термометра. При какой температуре t отклонение $\Theta-t$ в рассматриваемом температурном интервале максимально?

14. Имеются два газовых термометра с постоянным объемом, в которых за меру изменения температуры принимает-

---

[1]) Водяным эквивалентом калориметра называется масса воды, теплоемкость которой равна теплоемкости калориметра.

ся изменение давления газа. Один термометр наполнен идеальным газом, другой — газом, подчиняющимся уравнению состояния вида

$$P+\pi(V)=\varphi(V)\Theta(t),$$

где $\pi(V)$, $\varphi(V)$ и $\Theta(t)$ — произвольные функции, зависящие только от объема и температуры газа соответственно. Термометры градуируются обычным способом по двум реперным точкам. Показать, что если в обоих термометрах температуры реперных точек выбраны одинаковыми, то показания термометров совпадут при любых температурах.

15. Каким образом с помощью медицинского термометра можно измерить температуру человеческого тела, если она ниже температуры окружающего воздуха, в котором находится человек? Предварительное охлаждение термометра перед измерением не допускается.

16. Для определения коэффициента объемного расширения α стекла взвешивают небольшой стеклянный баллон с оттянутым кончиком — сначала пустой, а затем с количествами ртути, необходимыми для наполнения всего баллона при двух температурах, например 0 °С и t. Пусть m_0 и m_1 — массы ртути при указанных температурах. Определить коэффициент объемного расширения стекла α, если коэффициент объемного расширения ртути α_1.

17. Стеклянный шарик с коэффициентом объемного расширения α взвешивается в жидкости при температурах t и t_1. Массы вытесненной жидкости соответственно m и m_1. Определить коэффициент объемного расширения жидкости α_1 в интервале температур от t до t_1.

18. Пикнометр при некоторой температуре t заполнен спиртом, масса которого равна m. Затем пикнометр вместе со спиртом нагревается до температуры t_1, и излишек спирта против прежнего уровня удаляется фильтровальной бумагой. После этого масса спирта оказалась равной m_1. Определить средний коэффициент объемного расширения спирта α, если коэффициент линейного расширения стекла β.

19. Коэффициент линейного расширения нейзильбера β определялся при помощи рычажного прибора (рис. 1). Длина стержня A при температуре $t_0=0$ °С равна $l_0=23{,}02$ см. При нагревании до $t_1=99{,}3$ °С стрелка второго рычага отклонилась на угол $\varphi=9°30'$. Короткое плечо второго рычага $DE=a=2{,}5$ см. Отношение плеч первого рычага $BC:BD=1:10$. Определить величину β.

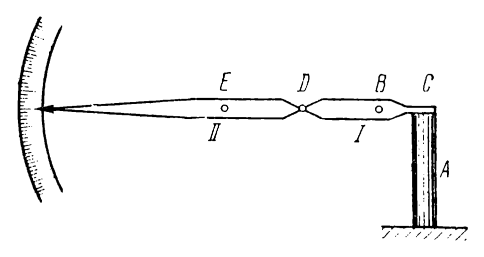


Рис. 1.

20. Для определения коэффициентов объемного расширения разных металлов может быть применен следующий метод. Металлический стержень массы m с плотностью ρ_0 при 0 °С помещается в стеклянный баллон с оттянутым кончиком. Баллон заполняется ртутью. Коэффициенты объемного расширения ртути α и стекла β считаются известными. Массы ртути, заполняющей пространство в баллоне, не занятое металлом, при 0 °С и t равны соответственно M_0 и M_t. Плотность ртути при 0 °С равна δ_0. На основании этих данных найти коэффициент объемного расширения x металла.

21. Для определения истинного коэффициента объемного расширения жидкостей применяется следующий метод. Два сообщающихся сосуда наполняются жидкостью, расширение которой исследуется; при одинаковой температуре обоих сосудов жидкость в них находится на одной высоте. Если один из сосудов охлаждать тающим льдом, а другой нагревать в парах кипящей при нормальном атмосферном давлении воды, то при равновесии уровни жидкостей будут различны. Эта разность уровней дает возможность вычислить коэффициент объемного расширения α. Вывести выражение для α.

22. Барометр имеет латунную шкалу. При температуре $t_1=27$ °С высота ртутного столба, отсчитанная по шкале, равна $H_1=751{,}3$ мм. Определить высоту столба H_0 при $t_0=0$ °С. Коэффициент линейного расширения латуни $\beta=0{,}000019$ °С$^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути $\alpha=0{,}000182$ °С$^{-1}$.

23. Колесо паровоза имеет радиус $r_0=1$ м при $t_0=0$ °С. Определить разницу в числах оборотов колеса летом при температуре $t_1=25$ °С и зимой при температуре $t_2=-25$ °С на пути пробега паровоза $l=100$ км. Коэффициент линейного расширения металла колеса $\beta=0{,}000012$ °С$^{-1}$.

24. В сосуде, наполненном водой, плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды после того, как лед растает, если окончательная температура воды останется равной 0 °С?

25. Из кварца параллельно его оси вырезана круглая пластинка, радиус которой при температуре t_1 равен r. Определить площадь пластинки S при температуре t_2. Коэффициент расширения кварца параллельно оси $\beta_{\parallel}$, а перпендикулярно к ней $\beta_{\perp}$.

26. Из кварца вырезан цилиндр, ось которого параллельна оси кварца. При температуре $t_1=18$ °С радиус цилиндра $r=10$ мм, а высота $l=50$ мм. Определить объем этого цилиндра V_2 при температуре $t_2=300$ °С. Для кварца коэффициент линейного расширения $\beta_{\parallel}=0{,}000072$ °С$^{-1}$, а $\beta_{\perp}=$ $=0{,}0000132$ °С$^{-1}$.

27. Коэффициенты линейного расширения кристалла по трем главным направлениям равны соответственно β_x, β_y, β_z. (Главные направления приняты за координатные оси X, Y, Z.) Найти коэффициент объемного расширения кристалла α, а также коэффициент линейного расширения β_s вдоль прямой, направление которой характеризуется единичным вектором $\boldsymbol{s}$.

28. Доказать, что если три величины x, y, z связаны функциональным уравнением $f(x, y, z)=0$, то их производные $(\partial x/\partial y)_z$, $(\partial y/\partial z)_x$, $(\partial z/\partial x)_y$ удовлетворяют соотношению

$$(\partial x/\partial y)_z (\partial y/\partial z)_x (\partial z/\partial x)_y = -1. \qquad (28.1)$$

29. Доказать, что коэффициент объемного расширения α, температурный коэффициент давления λ и изотермическая сжимаемость γ физически однородного и изотропного тела связаны соотношением

$$V_0\alpha = P_0V\lambda\gamma, \qquad (29.1)$$

где V_0 и P_0 — объем и давление тела при 0 °С.

30. Коэффициент объемного расширения ртути α при 0 °С и атмосферном давлении равен 0,00018 °С$^{-1}$. Сжимаемость $\gamma=0{,}0000039$ атм$^{-1}$. Вычислить температурный коэффициент давления λ для ртути.

31. На сколько надо увеличить внешнее давление, чтобы сохранить постоянным объем ртути при нагревании ее от 0 до 10 °С. (См. предыдущую задачу.)

32. Какую силу F надо приложить к стальному стержню сечением в 1 см^2, чтобы растянуть его настолько же, на-

сколько он удлиняется при нагревании на $\Delta t=1$ °С. Коэффициент линейного расширения $\beta=12\cdot10^{-6}$ °С$^{-1}$. Модуль Юнга $E=2,1\cdot10^{7}$ Н/см^{2}.

33. Стальной бандаж нагоняется на вагонное колесо при температуре $t_1=300$ °С. Определить силу натяжения T в бандаже при температуре $t_0=20$ °С, если сечение бандажа $S=20$ см^{2}. Модуль Юнга $E=2,1\cdot10^{7}$ Н/см^{2} и коэффициент линейного расширения $\beta=12\cdot10^{-6}$ °С$^{-1}$.

34. Найти плотность ρ морской воды на глубине 5 км, если на поверхности океана плотность $\rho_0=1,03$ г/см^{3}, а сжимаемость воды в пределах давлений от 1 до 500 атм равна $\gamma=47,5\cdot10^{-6}$ атм$^{-1}$.

35. Какое максимальное давление может произвести вода при замерзании? Плотность льда $\rho=0,917$ г/см^{3}, модуль Юнга для льда $E=2,8\cdot10^{11}$ дин/см^{2}, коэффициент Пуассона $\sigma=0,3$.

36. Имеется несколько часов с маятниками из одинакового материала, но разной длины. Показать, что если все эти часы выверены при некоторой температуре t_1, то при температуре t_2 относительное изменение хода одинаково для всех часов и не зависит от длины маятника.

37. Компенсационный маятник состоит из длинной тонкой никелевой трубки пренебрежимо малой массы, небольшая часть объема которой заполнена ртутью. Коэффициент линейного расширения никеля $\beta=1,0\cdot10^{-5}$ °С$^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути $\alpha=18,0\cdot10^{-5}$ °С$^{-1}$. Какую часть объема трубки следует заполнить ртутью, чтобы период колебаний маятника не изменялся с изменением температуры? Для простоты сначала рассматривать маятник как математический, т. е. считать, что центр качаний его совпадает с центром масс ртути. Затем учесть несовпадение центра качания с центром масс ртути.

38. Любопытное явление, замеченное и объясненное Каноном Мозели, описано Джоном Тиндалем в книге «Теплота, рассматриваемая как род движения». Тиндаль писал: «Хоры Бристольского собора были покрыты свинцовыми листами. Длина крыши 60 футов, ширина 19 футов 4 дюйма [1]). Свинец был положен в 1851 г., и два года спустя он всей массой подвинулся вниз на 18 дюймов. Понижение свинца происходило постоянно с тех самых пор, как им были покрыты хоры. Попытка остановить его движение вколачиванием гвоздей в стропила не удалась, потому что сила,

---

[1]) 1 фут = 0,3048 м, 1 дюйм = 25,4 мм.

с которой опускался свинец, вырывала гвозди. Крыша была некрутая и свинец мог бы оставаться на ней, не скользя вниз из-за действия силы тяжести». Объяснить описанное явление.

§ 2. Идеальные газы

39. Вычислить для идеального газа следующие величины: коэффициент объемного расширения α, температурный коэффициент давления λ, изотермическую сжимаемость γ_T, изотермический модуль объемной упругости $K_T = -V(\partial P/\partial V)_T$. (См. задачу 29.)

40. Пользуясь уравнением Клапейрона $PV=RT$, убедиться непосредственным расчетом в справедливости соотношений (29.1) и (29.2).

41. Имеется смесь различных идеальных газов с массами M_1, M_2, M_3, . . . и относительными молекулярными массами μ_1, μ_2, μ_3, . . . соответственно[1]). Показать, что уравнение состояния такой смеси можно записать в виде $PV = \frac{M}{\mu}RT$, где $M=M_1+M_2+M_3+\ldots$ — полная масса смеси, а постоянная μ играет роль средней относительной молекулярной массы смеси. Найти μ.

42. Найти плотность ρ двухатомного кислорода при давлении $P=50$ атм и температуре $t=27$ °C.

43. Для определения плотности газа поступили следующим образом. Большой стеклянный баллон емкостью V был наполнен испытуемым газом до давления H мм рт. ст. и взвешен. Его масса оказалась равной M. Затем часть газа была удалена, и давление его упало до h мм рт. ст. Новая масса баллона — m. Какова плотность газа при атмосферном давлении?

44. Электрическая газонаполненная лампа накаливания наполнена азотом при давлении в 600 мм рт. ст. Емкость лампы 500 см^3. Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой при нормальном атмосферном давлении?

45. Найти число ходов n поршня, чтобы поршневым воздушным насосом откачать сосуд емкостью V от давления P_1 до давления P_2, если емкость хода поршня равна v. Вредным пространством пренебречь.

---

[1]) По старой терминологии относительные молекулярная и атомная массы назывались молекулярным и атомным весами.

46. Узкая цилиндрическая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути. Когда трубка обращена закрытым концом кверху, воздух внутри нее занимает длину l; когда же трубка обращена кверху открытым концом, то воздух внутри нее занимает длину $l' < l$. Длина ртутного столбика h мм. Определить атмосферное давление.

47. Барометрическая трубка погружена в глубокий сосуд со ртутью так, что уровни ртути в трубке и в сосуде совпадают. При этом воздух в трубке занимает столб длиною l см. Трубку поднимают на l' см. На сколько сантиметров Δl поднимается ртуть в трубке? Атмосферное давление равно H см рт. ст.

48. Цилиндрическая пипетка длиной l наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Часть ртути вытекает. Какой длины столбик ртути останется в пипетке? Атмосферное давление равно H.

49. Манометром Мак-Леода нужно измерять давления до 0,1 мм рт. ст. Емкость шара манометра не должна превышать 150 см³, а длина капилляра не должна превышать 20 см. Каково должно быть минимальное сечение капилляра?

50. На каком расстоянии от конца капилляра манометра предыдущей задачи будет находиться черточка, соответствующая давлению 0,00005 мм рт. ст.?

51. В плохо просушенном баллоне при температуре $t=20$ °C содержится смесь воздуха и водяного пара, парциальные давления которых соответственно равны 0,25 и 0,1 мм рт. ст. Определить ошибку в показании манометра Мак-Леода, подсоединенного к баллону для измерения давления, если объем баллона манометра $V=50$ см³, радиус капилляра $r=1$ мм. Упругость водяного пара при 20 °C равна 17,5 мм рт. ст.

52. Какой объем занимает моль идеального газа при давлении 3 атм и температуре $T=400$ K?

53. Плотность воздуха при температуре 0 °C и давлении 760 мм рт. ст. равна 0,001293 г/см³. Определить массу литра воздуха при температуре 27,3 °C и давлении 750 мм рт. ст.

54. Аэростат объемом V м³ наполнен водородом при температуре $t_1=15$ °C. При неизменном давлении атмосферы под влиянием солнечной радиации его температура поднялась до $t_2=37$ °C, а излишек газа вышел через аппендикс, благодаря чему масса аэростата с газом уменьшилась на

$M=6{,}05$ кг. Плотность водорода $\rho_0=0{,}000089$ г/см^3. Определить объем аэростата V.

55. Действием кислоты на некоторое количество мрамора ($CaCO_3$) получено $V=1320$ см^3 углекислоты при температуре $t_1=22$ °C и давлении $P=1000$ мм рт. ст. Определить массу M вошедшего в реакцию мрамора. Плотность CO_2 при 0 °C и давлении 760 мм рт. ст. равна $\rho_0=0{,}001977$ г/см^3.

56. Фабричная труба высотой $l=50$ м выносит дым при температуре $t_1=60$ °C. Определить статическое давление P, производящее тягу в трубе. Температура воздуха $t_2=-10$ °C. Плотность воздуха $\rho_0=1{,}29\cdot10^{-3}$ г/см^3.

57. В ртутном барометре с правильной цилиндрической барометрической трубкой расстояние от уровня ртути в чашке до запаянного конца трубки равно L. В трубку при нормальном барометрическом давлении H и температуре t_1 попал пузырек воздуха, благодаря чему длина ртутного столба уменьшилась и стала равной h_1. Найти выражение для поправки p_1, прибавляя которую к показанию h барометра, можно было бы пользоваться последним при любых температурах t и любых высотах h ртутного столба.

58. Давление воздуха, заключенного в закрытом колене манометра длины l, уравновешивает столб ртути длиной h при барометрическом давлении H_0 и абсолютной температуре T_0. Какой столб ртути h_1 будет уравновешивать давление этого воздуха при барометрическом давлении H_1 и температуре T_1?

59. В тонкостенный сферический баллон массы $M=1$ кг нагнетается азот при температуре $T=300$ К. Найти максимальное количество азота, которое можно поместить в сосуд, если допустимое напряжение в стенках баллона $\sigma=50$ Н/мм^2. Плотность стали $\rho=7{,}8$ г/см^3.

60. Мощностью насоса или скоростью откачки K называется величина объема газа, откачиваемая насосом в 1 с и измеряемая при том давлении, которое имеется в рассматриваемый момент времени в насосе. Вообще говоря, она зависит от давления. Считая K постоянной, найти изменение давления P внутри откачиваемого сосуда, если насос и сосуд сообщаются капилляром длины l и диаметра D, а газ в сосуде настолько разрежен, что длина свободного пробега молекул в откачиваемом сосуде очень велика по сравнению с D. Согласно Кнудсену (см. задачи 425 и 426), при таких условиях масса газа, протекающая ежесекундно по капилляру, на концах которого давления равны P_1 и P_2, опреде-

ляется выражением $\frac{P_1 - P_2}{w}$, где $w = 2{,}18 \cdot 10^4 \frac{l}{D^3} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, T — абсолютная температура газа, μ — его относительная молекулярная масса. Все величины измеряются в системе СГС.

61. Скорость откачки вращающегося масляного насоса 150 см³/с. Сколько потребуется времени, чтобы колбу в 5 л откачать от нормального атмосферного давления до давления в $1 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст.?

62. Через какое время τ насос Ленгмюра откачает двухлитровый баллон с воздухом от давления $P_0 = 10^{-3}$ мм рт. ст. до $P = 10^{-5}$ мм рт. ст., если баллон соединен с насосом трубкой длины $l = 25$ см и диаметра $D = 7$ мм? Скорость откачки насоса $K = 1000$ см³/с. Температура воздуха $t = 18$ °С.

63. Два сосуда A и B с воздухом соединены между собой капилляром с краном. Сосуд A погружен в водяную ванну с температурой $t_1 = 100$ °С, а сосуд B — в охлаждающую смесь с температурой $t_2 = -20$ °С. Вначале сосуды были разобщены друг от друга краном, и давления воздуха в сосудах A и B были равны соответственно $P_1 = 400$ мм рт. ст. и $P_2 = 150$ мм рт. ст. Найти давление, установившееся после открытия крана, если объем A равен $V_1 = 250$ см³, а объем B равен $V_2 = 400$ см³.

64. Показать, что результирующая всех сил давления идеального газа на стенки вертикального закрытого цилиндрического сосуда, в котором заключен газ, при любой длине цилиндра тогда и только тогда равна весу газа, когда плотность газа определяется барометрической формулой

$$\rho = \rho_0 \exp\left\{-\frac{\mu}{RT} g x\right\}, \qquad (64.1)$$

где μ — относительная молекулярная масса газа, R — газовая постоянная, T — температура и g — ускорение свободного падения. Температура газа предполагается одинаковой во всем цилиндре, а газ находится в равновесии.

§ 3. Работа и количество тепла. Первое начало термодинамики

65. В калориметр с водой массы m_1 погружен кусок льда массы m_2. Определить температуру воды t после того, как лед растаял, если начальная температура воды была равна t_1, а льда — 0 °С. Удельная теплота плавления льда равна q.

66. Какое количество воды m при температуре $t_0=20$ °С можно заморозить испарением $M=100$ г серного эфира, имеющего температуру $t_1=20$ °С, удельные теплоемкость $c_э=0{,}5$ кал/(г·°С) и теплоту испарения $q_э=90$ кал/г (при условии, что теплота испарения берется исключительно за счет воды)? Считать теплоту испарения эфира не зависящей от температуры.

67. Для определения удельной теплоемкости цинка c_2 кусок его массы $m_2=235{,}6$ г нагрет до температуры $t_2=$ $=99{,}3$ °С и опущен в латунный калориметр. Удельная теплоемкость латуни $c_1=0{,}093$ кал/(г·°С), масса калориметра и мешалки $m_1=100$ г, масса воды $m=209{,}3$ г; начальная температура калориметра и воды $t_0=20{,}5$ °С. Температура воды в калориметре повысилась до $t=27{,}6$ °С. Определить удельную теплоемкость цинка.

68. Две жидкости нагреваются в одинаковых сосудах одним и тем же электрическим током, для чего в каждый сосуд вставлены одинаковые проволочные сопротивления. В первом сосуде жидкость нагрелась от t_0 до t_1. Масса жидкости в первом сосуде m, удельная теплоемкость c, полная теплоемкость первого сосуда C_1. Определить удельную теплоемкость жидкости c', налитой во второй сосуд, если за то же время она нагрелась от t' до t'_1, полная теплоемкость второго сосуда C'_1, а масса жидкости в нем m'.

69. Вода при соблюдении необходимых предосторожностей может быть переохлаждена до температуры $t=-10$ °С. Какая масса льда m образуется из $M=1$ кг такой воды, если бросить в нее кусочек льда и тем вызвать замерзание? Теплоемкость переохлажденной воды считать не зависящей от температуры и равной теплоемкости обычной воды.

70. 1 г водорода, сгорая и превращаясь в воду, выделяет 34 000 кал тепла. Сколько граммов угля надо сжечь для диссоциации 1 г воды, если из выделяемой углем теплоты используется 50%? Удельная теплота сгорания угля равна 7000 кал/г.

71. В приборе, предназначенном для определения механического эквивалента теплоты, мешалка, снабженная лопатками, вращается внутри наполненного водой калориметра. Трение воды о стенки калориметра вызывает силу, стремящуюся вращать калориметр в направлении вращения мешалки. Но вращению его препятствует груз массы m, висящий на нити, перекинутой через блок и прикрепленной к крышке калориметра на шкиве радиуса R. При таком устройстве момент силы тяжести груза постоянен и противо-

положен по знаку моменту сил трения, действующих на стенки калориметра со стороны жидкости. Груз при вращающейся мешалке не падает и не поднимается. Определить механический эквивалент E, если температура повысилась на Δt после того, как мешалка сделала N оборотов. Масса воды в калориметре M, w — его водяной эквивалент.

72. Какую скорость v должна иметь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стальную плиту она расплавилась? Температура пули $t_0=27$ °С, температура плавления $t_1=327$ °С, удельная теплота плавления свинца $q=5$ кал/г, удельная теплоемкость свинца $c=0{,}03$ кал/(г·°С).

73. Выразить в системе СГС теплоту Q, затраченную на нагревание свинцового шарика массы $m=100$ г на $(t_1-t_0)=$ $=10$ °С. Удельная теплоемкость свинца $c=0{,}0307$ кал/(г·°С).

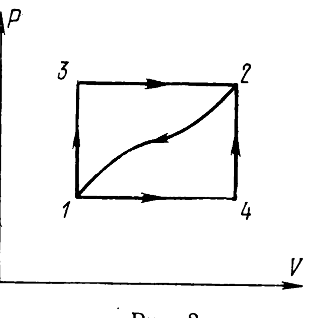


Рис. 2.

74. На диаграмме P, V, изображенной на рис. 2, показаны различные обратимые процессы изменения состояния некоторой термодинамической системы. Известно, что когда система переходит из состояния *1* в состояние *2* по пути *132*, то она получает $Q_{132}=80$ Дж тепла и при этом совершает работу $A_{132}=30$ Дж.

1) Какое количество тепла Q_{142} получит система, переходя из состояния *1* в состояние *2* по пути *142*, если известно, что при этом она совершает работу $A_{142}=10$ Дж?

2) Система возвращается из состояния *2* в состояние *1* по пути *21*. Совершенная при этом над системой внешняя работа равна $A_{21}=20$ Дж. Какое количество тепла Q'_{21} отдаст система в ходе этого процесса?

3) Найти количества тепла Q_{14} и Q_{42}, поглощаемые системой в процессах *14* и *42*, если разность внутренних энергий $U_4-U_1=40$ Дж [1]).

---

[1]) Работу, производимую системой, и количество тепла, получаемое ею, мы обозначаем через A и Q соответственно; работу же, производимую над системой, и количество тепла, отдаваемое ею, — через A' и Q'. Если A и Q — величины отрицательные, то это означает, что в действительности работа производится над системой и последняя отдает тепло. Если же отрицательны A' и Q', то система производит положительную работу и ей сообщается положительное тепло.

75. При сгорании 12 г твердого углерода в углекислый газ CO_2 выделяется $Q_1=97\,000$ кал, а при сгорании 28 г окиси углерода CO выделяется $Q_2=68\,000$ кал. Какое количество тепла Q выделилось бы при сгорании 12 г твердого углерода, если бы в результате сгорания получалась только чистая окись углерода?

76. При сгорании водорода при 100 °C с образованием одного моля водяного пара выделяется $Q_1=58\,000$ кал. При конденсации одного моля водяного пара при 100 °C выделяется $Q_2=9700$ кал. Найти теплоту образования одного моля жидкой воды Q из водорода и кислорода при той же температуре.

77. При полном сгорании моля метана в углекислоту и воду выделяется $Q_1=887$ кДж. При образовании из элементов моля воды выделяется $Q_2=287$ кДж, а при полном сгорании углерода с образованием моля CO_2 выделяется тепло $Q_3=407$ кДж. Определить теплоту Q образования моля метана из твердого углерода и газообразного водорода.

78. Согласно закону Джоуля внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры и не зависит от давления. Пользуясь этим и уравнением Клапейрона, показать, что энтальпия $I\equiv U+PV$ идеального газа не зависит от давления, а является функцией только его температуры.

79. Доказать, что если начальные и конечные продукты реакции являются идеальными газами, то 1) тепловой эффект реакции при постоянном объеме не зависит от объемов газов после реакции, 2) тепловой эффект реакции при постоянном давлении не зависит от давлений газов.

80. Рассматривая воздух как идеальный газ, показать, что при нагревании воздуха, находящегося в комнате, его внутренняя энергия не изменяется, если только внешнее давление остается постоянным.

81. В комнате в течение некоторого времени был включен нагреватель. При этом температура воздуха поднялась от t_1 до t_2, давление же его не изменилось и осталось равным давлению вне здания. Считая воздух идеальным газом, найти количество тепла Q, которое пошло на увеличение внутренней энергии воздуха, находящегося в комнате.

82. Моль идеального газа изотермически расширяется (или сжимается) от объема V_1 до объема V_2. Определить совершаемую им работу A и количество тепла Q, сообщенное газу.

83. Определить количество тепла Q', выделяющееся при изотермическом сжатии $m=7$ г азота, если при этом давление газа повышается в $n=50$ раз. Определить также работу A', которую надо затратить на это сжатие. Температура газа $t=27$ °С.

84. Найти механический эквивалент тепла, зная, что для воздуха $c_P=0,237$ кал/(г·°С) и $\gamma=c_P/c_v=1,41$. Относительная молекулярная масса воздуха $\mu=28,84$.

85. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью C. Кривая, изображающая политропический процесс, называется политропой. Найти уравнение политропы для идеального газа, теплоемкость C_V которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: 1) $C=C_V$, 2) $C=C_P$, 3) $C=0$, 4) $C=\infty$.

86. При каких значениях показателя политропы n идеальный газ нагревается при сжатии, а при каких охлаждается?

87. 1) Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $PV^2=\text{const}$? 2) Какова его молярная теплоемкость при этом процессе?

88. Решить предыдущую задачу для идеального газа, расширяющегося по закону $P^2V=\text{const}$.

89. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема в 4 л до конечного объема в 1 л. Давление при этом возросло от 1 до 8 атм. Найти теплоемкость C всей массы гелия, если его начальная температура была 300 К.

90. Вычислить молярную теплоемкость идеального газа для процесса, в котором давление P пропорционально объему V. Теплоемкость C_V газа не зависит от температуры.

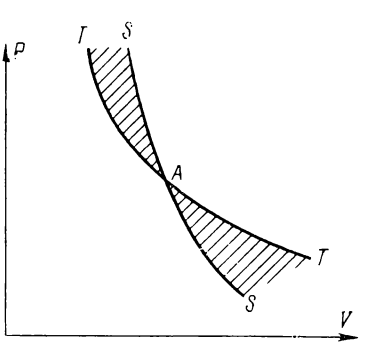


Рис. 3.

91. На диаграмме P, V (рис. 3) через произвольную точку A проведена изотерма TT и адиабата SS для идеального газа, теплоемкость C_V которого не зависит от температуры. Показать, что политропе, проходящей через A и лежащей в заштрихованной области, соответствует отрицательная теплоемкость, а

политропе в незаштрихованной области — положительная теплоемкость.

92. Найти уравнение процесса для идеального газа, при котором теплоемкость газа меняется с температурой по закону $C=\alpha T$, где α — постоянная.

93. Состояние идеального газа изменяется по политропе $P=kV$. Найти работу, совершаемую молем газа при повышении его температуры от T_1 до T_2.

94. Моль идеального газа нагревают в цилиндре под поршнем, удерживаемым в положении равновесия пружиной, подчиняющейся закону Гука (рис. 4). Стенки цилиндра и поршень адиабатические, а дно проводит тепло. Начальный объем газа V_0, при котором пружина не деформирована, подобран так, что $P_0S^2=kV_0$, где P_0 — наружное атмосферное давление, S — площадь поршня, k — коэффициент упругости пружины. Найти теплоемкость газа для этого процесса.

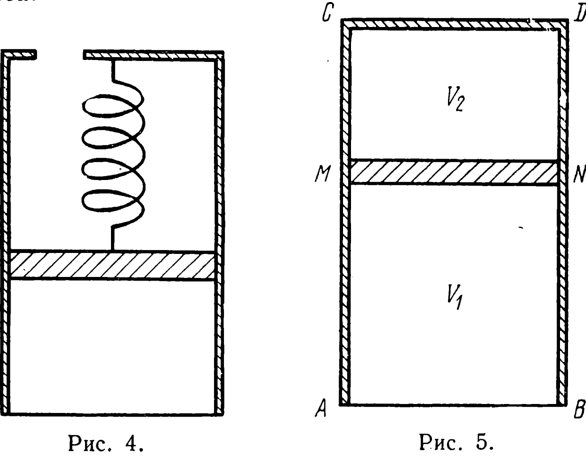


Рис. 4. Рис. 5.

95. Боковые стенки цилиндра AC и BD, его крышка CD и поршень MN сделаны из материала, не проводящего тепло (рис. 5). Дно AB проводит тепло. Поршень MN может двигаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу поршня находится по одному молю одного и того же идеального газа с молярной теплоемкостью при постоянном объеме C_V и показателем адиабаты γ. Первый газ в нижней части цилиндра квазистатически нагревают (или охлаждают), вследствие чего поршень MN перемещается. Выразить теплоемкость первого газа C_1 при таком процессе через объемы га-

зов V_1 и V_2. Чему равна при этом теплоемкость второго газа C_2?

96. Как изменится ответ предыдущей задачи, если верхнюю крышку CD сделать теплопроводящей, а температуру газа в верхней части цилиндра поддерживать постоянной?

97. Вычислить работу одного моля идеального газа в политропическом процессе, если объем газа изменяется от начального значения V_1 до конечного значения V_2.

98. Путем предельного перехода $n \to 1$ получить из ответа предыдущей задачи выражение для работы идеального газа при изотермическом процессе.

99. Найти изменение внутренней энергии ΔU массы азота при его квазистатическом адиабатическом расширении от объема $V_1=10$ л, занимаемого при нормальном давлении P_1, до объема $V_2=320$ л.

100. Найти изменение внутренней энергии ΔU моля идеального одноатомного газа, изобарически расширившегося от объема $V_1=10$ л до объема $V_2=20$ л при давлении $P=5$ атм.

101. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание 1 м³ воздуха от 0 до 1 °С при постоянном объеме и начальном давлении $P=760$ мм рт. ст.? Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0=0{,}00129$ г/см³, $c_P=0{,}237$ кал/(г·°С), $\gamma=c_P/c_v=1{,}41$.

102. Решить предыдущую задачу в предположении, что воздух нагревается не от 0 до 1 °С, а от 91 до 92 °С.

103. Какое количество тепла Q нужно сообщить 75 г водяных паров, чтобы нагреть их от 100 до 250 °С при постоянном объеме?

104. 1 м³ водорода при 0 °С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легкоскользящим невесомым поршнем. Атмосферное давление 730 мм рт. ст. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание водорода до 300 °С?

105. Смешано $m=4{,}032$ г водорода с $m_1=32$ г кислорода. Их удельные теплоемкости $c_P=3{,}50$ кал/(г·°С) и $c_{P1}=0{,}218$ кал/(г·°С). Определить уменьшение внутренней энергии ΔU этой смеси при охлаждении ее на $\Delta t=20$ °С при постоянном объеме. Для обоих газов $\gamma=1{,}40$.

106. В объеме V_0 при температуре $t=0$ °С содержится ν молей водорода и $\nu/2$ молей кислорода. Найти выражение для максимального давления P_t при той же температуре водяного пара, полученного при взрыве смеси, если молярная теплоемкость водяного пара C, а молярная теплота образования воды из кислорода и водорода Q?

107. Два теплоизолированных сосуда с объемами $V_1 = 1$ л и $V_2 = 3$ л соединены трубкой с краном. До открытия крана в первом сосуде содержался азот под давлением $P_1 = 0{,}5$ атм при температуре $t_1 = 0$ °C, а во втором — аргон под давлением $P_2 = 1{,}5$ атм при температуре $t_2 = 100$ °C. Определить, какие давление и температура установятся в смеси газов, если открыть кран.

108. Показать, что закон Дальтона для смеси газов, имеющих одинаковое значение $\gamma = C_P/C_V$ и химически не реагирующих друг с другом, есть следствие закона сохранения энергии.

109. Определить удельную теплоемкость c_v смеси 50% по весу водорода и гелия, заключенной в объеме $V = 1$ л при температуре 27 °C и давлении $P = 800$ мм рт. ст. Молярные теплоемкости водорода H_2 $C_{V1} = 5$ кал/(моль·°C) и гелия $C_{V2} = 3$ кал/(моль·°C).

110. При некоторых условиях α% молекул водорода диссоциировано на атомы. Найти молярную теплоемкость C_V этого газа при $\alpha = 25$. Молярные теплоемкости атомарного водорода $C_{V1} = 2{,}94$ кал/(моль·°C), молекулярного водорода $C_{V2} = 4{,}9$ кал/(моль·°C).

111. Какое количество тепла Q' отдает моль одноатомного идеального газа при его изобарическом обратимом охлаждении, если на сжатие газа в ходе этого процесса затрачена работа $A = 10$ Дж?

112. Какое количество тепла Q потребовалось подвести к молю одноатомного газа при его изобарическом обратимом нагревании, если в процессе нагревания газ совершил внешнюю работу $A = 10$ Дж?

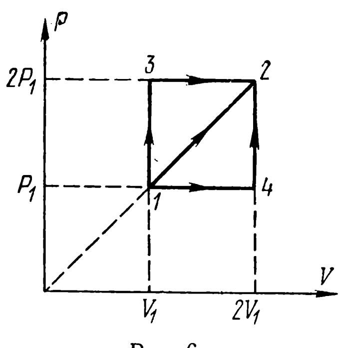


Рис. 6.

113. Какое количество тепла Q отдает моль одноатомного идеального газа при его изобарическом обратимом охлаждении от температуры T_1 до температуры T_2, если на сжатие газа в ходе этого процесса затрачена работа $A = 12$ Дж?

114. Моль идеального газа с молярной теплоемкостью $C_V = {}^5/_2 R$ три раза обратимо переводится из состояния *1* в состояние *2* в результате поочередного выполнения трех различных термодинамических процессов: *132*, *142* и *12*

(рис. 6). Найти количества тепла Q_{132}, Q_{142} и Q_{12}, получаемые газом в ходе каждого из этих процессов. Найти молярную теплоемкость C_{12} газа для процесса *12*. Все результаты выразить через газовую постоянную R и температуру T_1 газа в состоянии *1*.

115. В сосуде емкостью $V=10$ л находится кислород O_2 под давлением $P_0=1$ атм. Стенки сосуда могут выдержать давление до $P_1=10$ атм. Какое максимальное количество тепла Q можно сообщить газу?

116. Воздух, находящийся в трубке «воздушного огнива» при температуре $t_1=17\,°C$, подвергается адиабатному сжатию от давления $P_1=1$ атм до давления $P_2=10$ атм. Найти температуру воздуха после сжатия, если отношение $\gamma=C_P/C_V$ для воздуха равно 1,4. Считать применимым уравнение адиабаты. «Воздушным огнивом» называется закрытый с одного конца цилиндр с толстыми адиабатическими стенками, внутрь которого можно быстро вдвигать поршень и таким путем воспламенять пары эфира, подмешанные к воздуху. (Вместо эфира можно взять кусочек пироксилиновой ваты, положенный на дно цилиндра или прикрепленный к поршню.)

117. Объем воздуха, находящегося в трубке «воздушного огнива», уменьшается в 10 раз. Найти температуру воздуха после уменьшения его объема, если начальная температура воздуха была 17°C. (См. предыдущую задачу.)

118. Найти адиабатический модуль объемного сжатия идеального газа $K_{\text{ад}}=-V(\partial P/\partial V)_{\text{ад}}$ и сравнить его с изотермическим модулем объемного сжатия $K_T=-V(\partial P/\partial V)_T$. (См. задачу 39.)

119. Чему равно отношение $\gamma=C_P/C_V$ для аргона, если при нагревании 1 кг аргона на 2 °C при постоянном давлении 760 мм рт. ст. требуется 250 кал, а при охлаждении его от 100 до 0 °C при давлении 10 атм в постоянном объеме 5 л выделяется 500 кал?

120. Для аргона отношение $\gamma=C_P/C_V=1{,}68$. Определить давление P_2, получившееся после адиабатического расширения этого газа от объема $V_1=1$ л до объема $V_2=2$ л, если начальное давление $P_1=1$ атм.

121. Для определения $\gamma=C_P/C_V$ иногда применяется следующий метод. Определенное количество газа, начальная температура, объем и давление которого соответственно равны t_0, V_0 и P_0, нагревается платиновой проволокой, через которую проходит электрический ток в течение опреде-

ленного времени: один раз при постоянном объеме, причем газ достигает температуры t_1 и давления P_1 (объем V_0), другой раз при постоянном давлении, причем температура становится равной t_2, а объем V_1 (давление P_0). Показать, что

$$\gamma = \frac{(P_1 - P_0)\, V_0}{(V_1 - V_0)\, P_0}.$$

122. Для определения C_P/C_V методом Клемана — Дезорма (рис. 7) в сосуд A через кран B нагнетают газ, чтобы давление в нем P_1 было несколько выше атмосферного. Затем

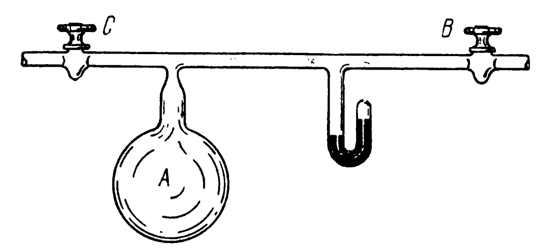


Рис. 7.

быстро открывают кран C. При этом газ расширяется адиабатически до атмосферного давления P_0. Через некоторое время, когда газ в сосуде примет снова температуру комнаты, давление его станет P_2. На основании этих данных найти выражение для $\gamma = C_P/C_V$.

123. Для определения отношения удельных теплоемкостей c_P и c_v газа измерили период T_1 малых колебаний ртути в U-образной стеклянной трубке с незапаянными концами. После этого на обе ветви трубки были насажены большие одинаковые полые стеклянные шары с исследуемым газом, вследствие чего период колебаний изменился и стал равным T_2. Считая процесс сжатия и разрежения газа в шарах адиабатическим, вывести формулу для $\gamma = c_P/c_v$. Объем каждого шара равен V см^3, давление газа в них в состоянии покоя h см рт. ст., а площадь поперечного сечения трубки S см^2. Объемом незаполненной части трубки можно пренебречь по сравнению с объемом шара V.

124. Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке ствола и пули удается добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким темпера-

турам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры T, давления P и плотности ρ аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы $m=100$ г влетает в ствол, имеющий объем $V=200$ см³, с начальной скоростью $v=250$ м/с. Начальные температура и давление соответственно равны $T_0=300$ К и $P_0=1$ атм.

125. Для измерения теплоемкости газа исследуемый нагретый газ заставляют протекать через спиральную металлическую трубку (змеевик), опущенную в воду калориметра. На одном конце змеевика поддерживают постоянными давление P_1 и температуру T_1. На выходе змеевика поддерживают давление P_2 и измеряют температуру газа T_2. По повышению температуры воды в калориметре можно определить количество тепла, отданное газом. Разделив полученную величину на понижение температуры и на число молей прошедшего газа, найдем его молярную теплоемкость. Какая теплоемкость измеряется таким методом?

126. В длинной вертикальной цилиндрической трубке, закрытой с нижнего конца, может ходить без трения поршень, масса M которого велика по сравнению с массой газа, заключенного внутри трубки. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном трубки равно l_0. Определить период малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня из положения равновесия, в предположении, что они являются изотермическими, а газ идеальным. Площадь поперечного сечения трубки равна S, нормальное атмосферное давление P_0. Рассмотреть предельный случай, когда $P_0=0$.

127. Решить предыдущую задачу в предположении, что колебания — адиабатические. Будет ли сказываться на результате зависимость показателя адиабаты γ для газа от температуры?

128. Два баллона с объемами V_1 и V_2, наполненные разными газами, соединены цилиндрической трубой с площадью поперечного сечения, равной S. В трубе находится поршень массы M. В положении равновесия давление газов по обеим сторонам поршня одинаково и равно P_0. Найти период τ малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня из положения равновесия в предположении, что процесс сжатия и расширения газов адиабатический. Показатели адиабат для газов равны соответственно γ_1 и γ_2. Объемом трубы по сравнению с объемами V_1 и V_2 пренебречь, трение между поршнем и стенками трубы не учитывать.

129. Идеальный газ находится в эластичной адиабатической оболочке под давлением P_1, имея температуру T_1. Определить температуру газа T_2, которая установится после того, как внешнее давление на газ скачкообразно изменится до величины P_2. Сравнить изменение температуры в этом процессе с изменением ее, которое получилось бы, если бы адиабатический процесс проходил квазистатически.

130. Выразить показатель адиабаты γ смеси нескольких идеальных газов через показатели адиабат γ_1, γ_2, ... и парциальные давления P_1, P_2, ... этих газов.

Указание. Воспользоваться выражением для внутренней энергии идеального газа $U=PV/(\gamma-1)$.

131. Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого C_P и C_V не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от давления P_0 до промежуточного давления P_1. Затем сжатый газ при постоянном давлении P_1 охлаждается до начальной температуры T_0. Наконец, газ сжимается до окончательного давления P_2. При каком значении промежуточного давления P_1 полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Давления P_0 и P_1, а также начальный объем газа V_0 считаются заданными. Как связана минимальная работа $A_{мин}$ с работой A_1, которую надо было бы затратить на сжатие газа до того же давления P_2, применяя одноступенчатый компрессор? Найти эту связь для гелия и воздуха, если $P_0=1$ атм, $P_2=$ $=200$ атм.

132. Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого C_P и C_V не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от объема V_0 до промежуточного объема V_1. Затем сжатый газ при постоянном объеме V_1 охлаждается до начальной температуры T_0. После этого газ сжимается до объема V_2. При каком значении промежуточного объема V_1 полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Объемы V_0 и V_2, а также начальное давление P_0 считаются заданными. Как связана минимальная работа $A_{мин}$ с работой A_1, которую надо было бы затратить, чтобы произвести такое же сжатие газа с помощью одноступенчатого компрессора? Найти эту связь для аргона и азота, если $V_0/V_2=50$.

133. Земная атмосфера нагревается в основном от контакта с земной поверхностью, поглощающей энергию солнечного излучения. Если температура воздуха достаточно

быстро убывает с высотой, то нагретые массы воздуха будут подниматься вверх, адиабатически расширяясь и охлаждаясь при этом. Это приводит к конвекции и связанному с ней нарушению механической устойчивости атмосферы. Каково должно быть максимальное значение температурного градиента атмосферного воздуха, чтобы он мог находиться в устойчивом механическом равновесии? Влияние влажности воздуха не учитывать. Абсолютную температуру воздуха у земной поверхности принять равной $T=273$ K.

134. Найти закон изменения давления воздуха с высотой в предположении, что температура воздуха равномерно понижается с высотой, так что температурный градиент постоянен и равен $-a$. Найти также давление воздуха как функцию температуры. Получить отсюда формулы для предельного случая изотермической атмосферы ($a=0$).

135. Какова была бы высота земной атмосферы, если бы температурный градиент ее был постоянен и равен $-a$? Вычислить эту высоту для частного случая адиабатического расслоения атмосферы, предполагая, что температура воздуха у земной поверхности $T_0=273$ K.

136. Исходя из первого начала термодинамики, найти разность теплоемкостей $C_P - C_V$ для любого физически однородного и изотропного вещества. Предполагается, что известно уравнение состояния $f(P, V, T)=0$, а также зависимость внутренней энергии тела от температуры и объема: $U=U(T, V)$. (См. также задачи 146, 147, 182, 231.)

137. Доказать, что адиабатическая и изотермическая сжимаемости физически однородного и изотропного вещества связаны соотношением

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{ад}} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

где $\gamma=C_P/C_V$. Показать, что это соотношение является следствием только первого начала термодинамики и функциональной зависимости между P, V и T (уравнения состояния).

138. Принимая, что процесс распространения звука в воздухе изотермический, Ньютон получил следующую формулу для скорости звука:

$$v=\sqrt{P/\rho},$$

где P — давление, ρ — плотность воздуха. Эта формула давала слишком малые значения для v. Лаплас принял, что процесс распространения звука в воздухе адиабатический,

и получил согласующуюся с опытом формулу

$$v=\sqrt{\gamma P/\rho},$$

где $\gamma=C_P/C_V$. Объяснить качественно, почему скорость звука по формуле Лапласа больше, чем по формуле Ньютона. В местах сжатия воздух нагревается, вследствие чего его упругость по сравнению с упругостью при таком же изотермическом сжатии увеличивается. В местах же разрежения воздух охлаждается, а его упругость соответственно уменьшается. Казалось бы, что влияние нагревания в местах сжатия должно компенсироваться влиянием охлаждения в местах разрежения, и скорости звука при изотермическом и адиабатическом процессах должны быть одинаковыми.

139. Показать, что скорость звука в идеальном газе есть функция одной только температуры.

140. Найти производную скорости звука v в идеальном газе по температуре T.

141. Найти увеличение скорости звука в воздухе при нагревании последнего от 0 до 1 °С.

142. Скорость звука в воздухе при 0 °С составляет 332 м/с. Определить скорость звука в водороде при той же температуре. Относительную молекулярную массу воздуха принять равной $M=28{,}8$.

143. Зная скорость звука в водороде (см. предыдущую задачу), вычислить скорость звука в гелии при 0 °С.

Указание. Принять во внимание, что водород — двухатомный газ, а гелий — одноатомный.

144. Определить $\gamma=C_P/C_V$, если скорость звука в воздухе при температуре 0 °С и нормальном давлении $P=76$ см рт. ст. равна $v=332$ м/с и плотность воздуха $\rho=0{,}001292$ г/см^3.

145. Найти отношение скоростей распространения звука в водороде v и в углекислоте v_1 при равных температурах. Для водорода $\gamma=C_P/C_V=1{,}4$, для углекислоты $\gamma_1=C_P/C_V=1{,}3$. Плотности водорода $\rho=0{,}0000899$ г/см^3, углекислоты $\rho_1=0{,}001977$ г/см^3 (при нормальных условиях).

146. Доказать, что для любого физически однородного тела имеет место соотношение

$$(C_P-C_V)\frac{\partial^2 T}{\partial P\,\partial V}+\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P-\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=1.$$

Это соотношение справедливо для всякой эмпирически определенной температуры T и в принципе может служить для проверки первого начала термодинамики.

147. Газ подчиняется уравнению состояния Клапейрона $PV=RT$. Найти для него разность теплоемкостей C_P-C_V, используя только первое начало термодинамики.

148. Найти конечную температуру T_2 и верхний предел скорости v стационарного потока углекислого газа CO_2, вытекающего через сопло в атмосферу из баллона, где он имел температуру $T_1=300$ К и находился под давлением $P_1=10$ атм, если давление наружного воздуха $P_2=1$ атм. Показатель адиабаты для CO_2 равен $\gamma=1{,}30$, удельная теплоемкость $c_P=0{,}202$ кал/(г·°С).

Указание. Применить уравнение Бернулли.

149. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре $T_1=273$ К, вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость $v=400$ м/с. Найти температуру вытекающего воздуха T_2 в конце трубки, а также давление P_1 воздуха в баллоне. Процесс истечения газа считать адиабатическим.

150. Определить максимальную скорость, которой может достигнуть газ при адиабатическом истечении из баллона, если абсолютная температура газа в баллоне равна T.

151. Найти конечную температуру T_2 и верхний предел скорости v стационарного потока перегретого пара, вытекающего через сопло в атмосферу из камеры, где он имел температуру $T_1=600$ К и находился под давлением $P_1=5$ атм, если давление наружного воздуха равно $P_2=1$ атм. Перегретый пар считать идеальным газом с молярной теплоемкостью $C_P=4R$.

152. Допустим, что температура горения химического горючего для ракетных двигателей $T=3000$ К, средняя относительная молекулярная масса продуктов горения $\mu=30$ и что истечение продуктов горения происходит в вакуум адиабатически. Найти, во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты M_0 должна превышать ее конечную массу M, чтобы ракета могла достичь первой космической скорости $v=8$ км/с. Молярную теплоемкость продуктов горения ориентировочно принять равной $C_P=8$ кал/(моль·°С). При вычислении скорости ракеты силу тяжести и трение о воздух не учитывать.

153. Тело (например, космический корабль) движется в идеальном газе со скоростью v. В какой точке тела температура газа будет максимальной? Определить эту температуру, если температура окружающего газа равна T.

154. Моль идеального газа с постоянной теплоемкостью C_V заключен в цилиндр с адиабатическими стенками и порш-

нем, который может перемещаться в цилиндре без трения. Поршень находится под постоянным внешним давлением P_1. В некоторый момент времени внешнее давление скачкообразно уменьшают или увеличивают до P_2. (Этого можно достигнуть, снимая часть груза с поршня или добавляя новый груз.) В результате газ адиабатически изменяет свой объем. Вычислить температуру и объем газа после того, как установится термодинамическое равновесие.

155. В предыдущей задаче, после того как установилось состояние равновесия, давление газа снова меняют скачкообразно до первоначального значения P_1. Вычислить окончательную температуру T_3 и окончательный объем газа V_3, когда он опять придет в состояние термодинамического равновесия. Показать, что в результате обоих адиабатических процессов температура и объем газа всегда возрастают. Рассмотреть специально случай, когда изменение давления $P_2—P_1$ мало. Определить для этого случая порядок малости изменений температуры $T_3—T_1$ и объема $V_3—V_1$.

156. Газ находится в цилиндре с поршнем, нагруженным песком. Стенки цилиндра и поршень — адиабатические. Снимая песчинку за песчинкой, производят адиабатическое расширение газа. Затем газ адиабатически сжимают, кладя обратно на поршень последовательно по одной песчинке. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, показать, что в предельном случае, когда масса песчинки исчезающе мала, а их число бесконечно велико, газ в обратном процессе пройдет через ту же последовательность равновесных состояний, что и в прямом процессе.

§ 4. Второе начало термодинамики

157. Привести пример процесса, при котором вся теплота, заимствованная из теплового резервуара, превращается в работу.

158. Показать непосредственным расчетом, что к. п. д. цикла Карно, проведенного с газом, термически идеальным, но калорически не идеальным, определяется выражением

$$\eta=\frac{\Theta_1-\Theta_2}{\Theta_1},$$

где Θ_1 и Θ_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника по шкале газового термометра, наполненного рассматриваемым идеальным газом. Показать, что если температуру Θ в тройной точке воды принять равной 273,16 °С,

то температурная шкала этого термометра будет совпадать с абсолютной термодинамической шкалой Кельвина.

Примечание. Газ называется термически идеальным, если он подчиняется уравнению Клапейрона. Термически идеальный газ называется калорически не идеальным, если его теплоемкость не зависит от объема, но зависит от температуры.

159. Каким путем теоретически эффективнее повысить к. п. д. машины Карно: увеличивая температуру нагревателя T_1 на ΔT при фиксированном значении температуры холодильника T_2 или понижая температуру холодильника T_2 на такую же величину ΔT при фиксированном значении температуры нагревателя T_1?

160. Тепловая машина Карно, имеющая к. п. д. $\eta=40\%$, начинает использоваться при тех же тепловых резервуарах как холодильная машина. Сколько тепла Q_2 эта машина может перевести от холодильника к нагревателю за один цикл, если к ней за каждый цикл подводится работа $A=10$ кДж?

161. Один моль одноатомного идеального газа ($\gamma={}^5/_3$) совершает в тепловой машине цикл Карно между тепловыми резервуарами с температурами $t_1=127\,°C$ и $t_2=27\,°C$. Наименьший объем газа в ходе цикла $V_1=5$ л, наибольший — $V_2=20$ л. Какую работу A совершает эта машина за один цикл? Сколько тепла Q_1 берет она от высокотемпературного резервуара за один цикл? Сколько тепла Q_2 поступает за цикл в низкотемпературный резервуар?

162. Тепловая машина Карно используется в качестве холодильной машины для поддержания температуры некоторого резервуара при температуре $t_2=-3\,°C$. Температура окружающего воздуха $t_1=27\,°C$. Какая механическая работа требуется для выполнения одного цикла машины, если при этом от оболочки резервуара отводится $Q_2=900$ кал тепла?

163. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изотерм и двух изобар, предполагая, что рабочим веществом является идеальный газ.

164. Найти к. п. д. цикла, проводимого с идеальным газом и состоящего из двух изотерм с температурами T_1 и T_2 и двух изохор с объемами V_1 и V_2 ($T_1>T_2$, $V_1>V_2$).

165. На рис. 8 изображена диаграмма обратимого цикла, выполняемого молем идеального газа в некоторой тепловой машине. Найти: работы A_{ik}, выполняемые машиной на каждом этапе цикла; количества тепла Q_{ik}, получаемые газом на каждом этапе и к. п. д. цикла, выразив его как функцию температур T_1, T_2, T_3. Процесс *31* — адиабатический.

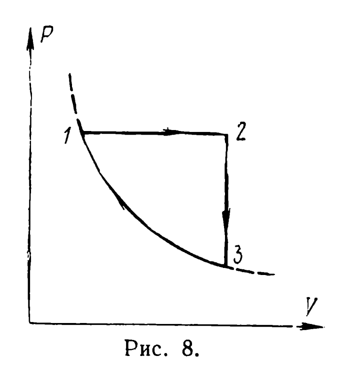


Рис. 8.

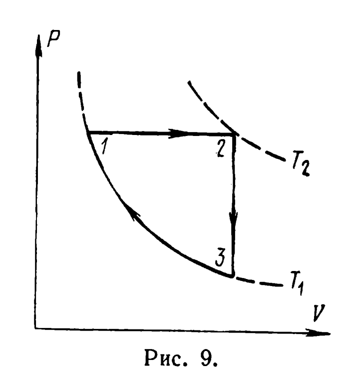


Рис. 9.

166. На рис. 9 изображена диаграмма обратимого цикла, выполняемого молем идеального газа в некоторой тепловой машине. Найти работы A_{ik}, выполняемые машиной, и количества тепла Q_{ik}, получаемые газом на каждом этапе цикла. Найти к. п. д. цикла, выразив его в функции T_1 и T_2. Процесс *31* — изотермический.

167. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изохоры *12*, адиабаты *23* и изотермы *31* (рис. 10). Рассчитать количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла. Найти к. п. д. машины как функцию максимальной T_2 и минимальной T_1 температур, достигаемых газом в этом цикле.

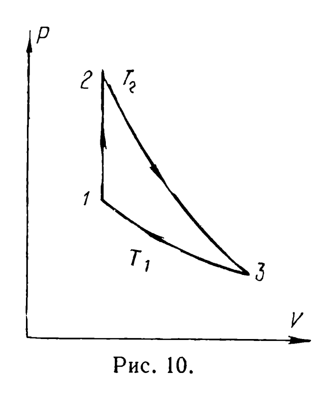


Рис. 10.

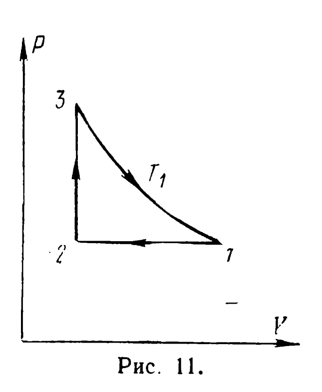


Рис. 11.

168. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает цикл, состоящий из изотермы *31* при температуре T_1, изобары *12* и изохоры *23* (рис. 11). Найти количества тепла, получаемые рабочим веществом на

каждом этапе цикла. Найти также к. п. д. этого цикла как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температур рабочего вещества, участвующего в цикле.

169. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изобары *12*, адиабаты *23* и изотермы *31* (рис. 12). Найти к. п. д. машины как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температур рабочего вещества, используемого в этом цикле. Найти также количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла.

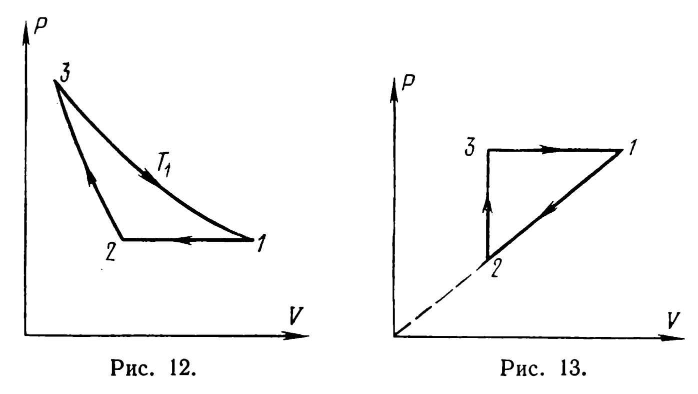


Рис. 12. Рис. 13.

170. Найти к. п. д. обратимого цикла, изображенного на рис. 13, как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температур вещества в этом цикле. Цикл совершает машина с идеальным газом в качестве рабочего тела. Найти также количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла.

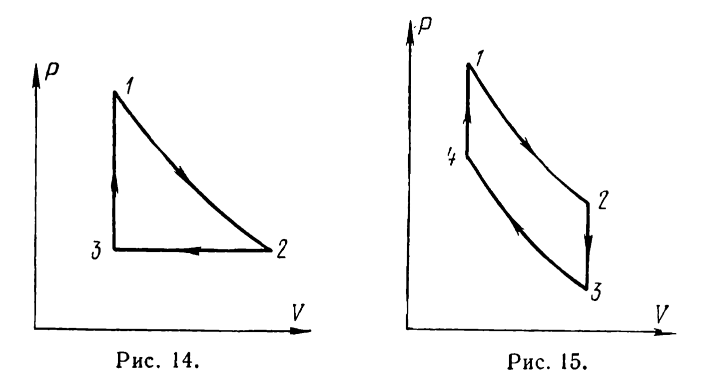


Рис. 14. Рис. 15.

171. Найти к. п. д. обратимой тепловой машины с идеальным газом в качестве рабочего вещества. Машина совершает цикл, состоящий из адиабаты *12*, изобары *23* и изохоры *31* (рис. 14). Выразить к. п. д. цикла через максимальную T_1 и минимальную T_3 температуры рабочего вещества.

172. Найти к. п. д. обратимого теплового цикла Отто, состоящего из адиабат *12*, *34* и изохор *23*, *41* (рис. 15), если в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Выразить к. п. д. цикла через температуры газа T_1 и T_2 в состояниях *1* и *2*.

173. Обратимый термодинамический цикл, выполняемый с молем идеального газа в качестве рабочего вещества, состоит из двух изотермических процессов *12*, *34* и двух политропических процессов *23*, *41* с теплоемкостью газа C_0 (рис. 16). Найти работы, совершаемые газом, и количества получаемого им тепла на всех этапах цикла. Найти к. п. д. тепловой машины, работающей по этому циклу.

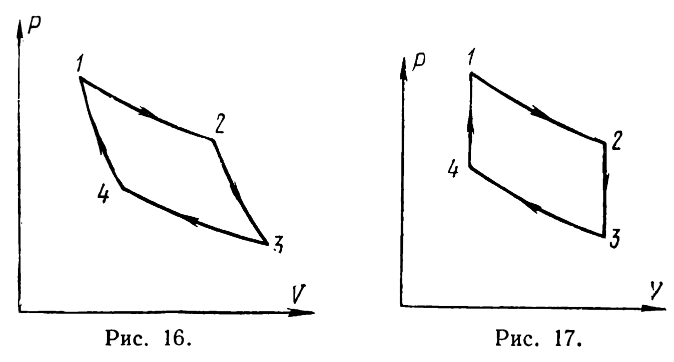


Рис. 16. Рис. 17.

174. Найти к. п. д. цикла Клапейрона, состоящего из двух изотерм *12*, *34* и двух изохор *23*, *41* (рис. 17), с идеальным газом в качестве рабочего вещества.

175. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и воспользовавшись теоремой Карно, доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость физически однородного и изотропного тела удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V. \quad (175.1)$$

С помощью этих соотношений и уравнения состояния для идеальных газов доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа зависят только от температуры, но не от объема, занимаемого данной массой газа.

176. Энтальпией или тепловой функцией физически однородного и изотропного вещества называется функция состояния, определяемая выражением $I=U+PV$. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и применив к нему теорему Карно, показать, что энтальпия I и теплоемкость C_P удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P. \quad (176.1)$$

177. Исходя из второго начала термодинамики, показать, что внутренняя энергия данной массы идеального газа не зависит от его объема, а является функцией только температуры (закон Джоуля).

178. Исходя из второго начала термодинамики, показать, что энтальпия данной массы идеального газа не зависит от его давления, а является функцией только температуры.

179. Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость C_V которого не зависит от объема, а зависит только от температуры.

180. Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость C_P которого не зависит от давления, а зависит только от температуры.

181. При 25 °C объем одного моля воды (в см^3) для давлений от 0 до 1000 атм определяется уравнением

$$V = a + bP + cP^2,$$

причем в том же интервале давлений

$$(\partial V/\partial T)_P = \alpha + \beta T,$$

где $a=18{,}066$, $b=-7{,}15\cdot 10^{-4}$, $c=4{,}6\cdot 10^{-8}$, $\alpha=4{,}5\cdot 10^{-3}$, $\beta=1{,}4\cdot 10^{-6}$. Определить работу A, необходимую для сжатия моля воды от 0 до 1000 атм при 25 °C, и найти приращение ее внутренней энергии ΔU.

182. Известно уравнение состояния физически однородного и изотропного вещества. Найти разность теплоемкостей $C_P - C_V$ для этого вещества.

Указание. Воспользоваться формулой (136.1).

183. Выразить разность удельных теплоемкостей $c_P - c_v$ физически однородного и изотропного вещества через температурный коэффициент расширения $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, изотермический модуль всестороннего сжатия $K = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ и плотность вещества ρ.

184. Найти разность удельных теплоемкостей $c_P - c_v$ для воды и ртути при $t=0$ °C ($T=273,15$ K). Для воды $\alpha = -6,10 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $K=2 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 10^3$ кг/м^3. Для ртути $c_P = 140$ Дж/(кг·K), $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}, $K=2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м^3. В чем причина малой разности $c_P - c_v$ для воды?

185. Причина различия между теплоемкостями c_P и c_v состоит в том, что при нагревании вещества при постоянном давлении требуется подводить тепло, идущее на 1) производство работы против внешнего давления P и 2) приращение внутренней энергии тела при изменении его объема, тогда как для нагревания тела при постоянном объеме этого не требуется. Выяснить (на примере воды и ртути) относительную роль обоих этих факторов для жидкостей, а также твердых тел и газов.

186. Как доказывается в термодинамике, необходимыми условиями стабильности физически однородного и изотропного вещества являются

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, \quad C_V > 0.$$

Используя их, показать, что для любого вещества $C_P > 0$, причем $C_P > C_V$.

187. Внешнее давление, действующее на воду, увеличивают, одновременно подводя или отводя тепло таким образом, что объем воды остается неизменным. Нагреется или охладится вода, если начальная температура была: 1) ниже 4 °C; 2) выше 4 °C?

188. Тепловая машина совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с несколькими тепловыми резервуарами (нагревателями и холодильниками). Пользуясь неравенством Клаузиуса, показать, что к. п. д. такой машины не может превосходить величину

$$\frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}},$$

где $T_{\text{макс}}$ — максимальная, а $T_{\text{мин}}$ — минимальная температуры тепловых резервуаров, с которыми машина обменивается теплом.

189. Какую максимальную работу можно получить из системы двух тел, нагретых до разных абсолютных температур T_{10} и T_{20} ($T_{10} > T_{20}$), если эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине? Теплоемкости тел C_1 и C_2 считать не зависящими от температуры.

Найти окончательную температуру T, которую будут иметь тела, когда установится тепловое равновесие между ними.

190. Рассмотреть предельный случай предыдущей задачи, когда теплоемкость холодильника C_2 бесконечно велика (нагретое тело, погруженное в бесконечную среду, температура которой T_{20} поддерживается постоянной).

191. Рассмотреть другой предельный случай задачи 189, когда бесконечно велика теплоемкость нагревателя C_1 (холодное тело, погруженное в более теплую бесконечную среду, температура которой T_{10} поддерживается постоянной).

192. Идея динамического отопления, высказанная В. Томсоном (1852 г.), заключается в следующем. Топливо сжигается в топке теплового двигателя, который приводит в действие холодильную машину. Холодильная машина отнимает теплоту от природного резервуара воды (например, от грунтовой воды) и отдает ее воде в отопительной системе. Одновременно вода в отопительной системе служит холодильником теплового двигателя. Определить теоретическое (без учета потерь) количество тепла, которое получает отапливаемое помещение от сжигания 1 кг каменного угля, приняв следующие условия: удельная теплота сгорания угля $q=8000$ ккал/кг, температура в котле паровой машины $t_1=210\,°C$; температура воды в отопительной системе $t_2=60\,°C$; температура грунтовой воды $t_3=15\,°C$.

193. Тепловой двигатель совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с нагревателем (температура $T_1=500$ К) и природным резервуаром воды (температура $T_2=290$ К). Полученная работа используется для приведения в действие холодильной машины, совершающей также круговой процесс. Холодильная машина забирает тепло от охлаждаемого резервуара (температура $T_3=250$ К) и передает тепло тому же природному резервуару воды. Найти минимальную мощность потока тепла от нагревателя Q_1, если мощность тепла, отводимого от холодильника для поддержания его температуры постоянной, равна $Q_3=100$ Вт.

194. Показать, что для любого вещества политропа может пересекать изотерму не более чем в одной точке.

195. Показать, что для любого вещества адиабата может пересекать изотерму не более чем в одной точке.

196. Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 18). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями C_V и C_P температуры в точках *1*, *2*, *3*, *4* связаны соотношением $T_1T_3=T_2T_4$.

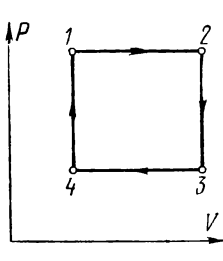


Рис. 18.

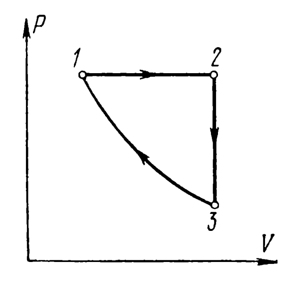


Рис. 19.

197. Цикл состоит из изобары *12*, изохоры *23* и адиабаты *31* (рис. 19). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями C_V и C_P температуры в точках *1*, *2*, *3* связаны соотношением $T_2/T_3=(T_2/T_1)^\gamma$, где $\gamma=C_P/C_V$.

198. Определить работу цикла, совершаемого любым веществом и состоящего из изотермы *12*, политропы *23* и адиабаты *31* (рис. 20). Известно, что теплоемкость тела на политропе *23* равна C, а температуры на изотерме *12* и в состоянии *3* равны соответственно T_1 и T_3.

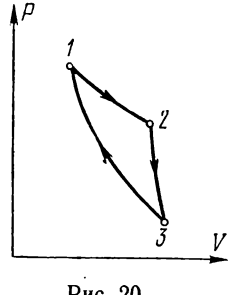


Рис. 20.

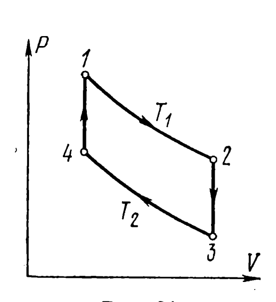


Рис. 21.

199. Цикл состоит из двух изотерм *12*, *34* с температурами T_1 и T_2 и двух изохор *23*, *41* (рис. 21). На изотерме с температурой T_1 получено тепло Q_1. Определить работу цикла, если теплоемкость рабочего вещества C_V зависит только от его температуры, но не зависит от объема.

200. Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния *1* в равновесное состояние *2* двумя способами. В первом способе система адиабатически охлаждается до температуры T_0, затем изотермически получает тепло и, наконец, адиабатически

переходит в состояние *2*. Во втором способе переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается выше T_0. Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния *1* в состояние *2* требуется меньшая затрата тепла, чем во втором.

201. Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния *1* в равновесное состояние *2* двумя способами. В первом способе система сначала изотермически при температуре T_0 переходит в какое-то промежуточное состояние, поглощая при этом тепло, а затем адиабатически охлаждается, переходя в состояние *2*. Во втором случае переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается ниже T_0. Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния *1* в состояние *2* требуется бóльшая затрата тепла, чем во втором.

202. Показать, что разность энтропий системы в состояниях *2* и *1* (при условии, что $S_2 > S_1$) может быть определена как наименьшее количество тепла, которое требуется сообщить системе, чтобы квазистатически перевести ее из состояния *1* в состояние *2* и притом так, чтобы при переходе температура системы не опускалась ниже 1 K.

203. Если во всех точках изотермы температурный коэффициент расширения равен нулю, то такая изотерма совпадает с адиабатой. Доказать.

204. В цикле Карно в качестве холодильника выбрана вода при 4 °C. Так как температурный коэффициент расширения при этой температуре равен нулю, то для осуществления цикла Карно не надо сообщать тепло холодильнику (см. предыдущую задачу), т. е. к. п. д. цикла равен единице. В чем ошибочность этого рассуждения?

205. В качестве основных переменных, характеризующих состояние тела, можно принять его температуру и энтропию. Изобразить графически цикл Карно на диаграмме, откладывая по оси абсцисс энтропию, а по оси ординат температуру. Вычислить с помощью этого графика к. п. д. цикла.

206. Тепловые машины с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершают обратимые термодинамические циклы, представленные на рис. 22 и 23. Выразить к. п. д. этих циклов через максимальную T_1 и минимальную T_2 температуры газа.

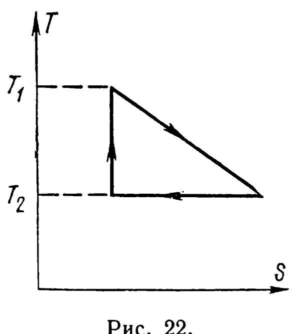


Рис. 22.

Рис. 23.

207. Найти изменение энтропии ΔS вещества при нагревании, если его удельная теплоемкость c постоянна, а коэффициент объемного расширения равен нулю.

208. Приводимые в тепловой контакт одинаковые массы вещества имеют разные температуры T_1 и T_2. Считая, что $C_P = \text{const}$, найти приращение энтропии в результате установления теплового равновесия при $P = \text{const}$.

209. Найти выражение для энтропии ν молей идеального газа.

210. Найти изменения энтропии моля идеального газа при изохорическом, изотермическом и изобарическом процессах.

211. Найти увеличение энтропии ΔS идеального газа массы M, занимающего объем V_1, при расширении его в пустоту до объема V_2 (процесс Гей-Люссака).

212. Вычислить изменения внутренней энергии и энтропии одного моля идеального газа при расширении по политропе $PV^n = \text{const}$ от объема V_1 до объема V_2. Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов.

213. Вычислить изменения внутренней энергии и энтропии одного моля идеального одноатомного газа и количество поглощенного тепла при расширении газа по политропе $PV^3 = \text{const}$ от объема $V_1 = 1$ л и давления $P_1 = 20$ атм до объема $V_2 = 3$ л. Температура во время процесса такова, что для молярной теплоемкости можно принять $C_V = {}^3/_2 R$.

214. При некотором политропическом процессе давление и объем определенной массы кислорода меняются от $P_1 = 4$ атм и $V_1 = 1$ л до $P_2 = 1$ атм и $V_2 = 2$ л. Температура в начале процесса $T_1 = 500$ К. Какое количество тепла полу-

чил кислород от окружающей среды? Насколько изменились энтропия и внутренняя энергия газа?

215. Найти изменение энтропии ΔS 5 г водорода, изотермически расширившегося от объема 10 л до объема 25 л.

216. В двух сосудах одного и того же объема находятся различные идеальные газы. Масса газа в первом сосуде M_1, во втором M_2, давления газов и температуры их одинаковы. Сосуды соединили друг с другом, и начался процесс диффузии. Определить суммарное изменение ΔS энтропии рассматриваемой системы, если относительная молекулярная масса первого газа μ_1, а второго μ_2.

217. Два баллона с объемами $V=1$ л каждый соединены трубкой с краном. В одном из них находится водород при давлении 1 атм и температуре $t_1=20$ °C, в другом — гелий при давлении 3 атм и температуре $t_2=100$ °C. Найти изменение энтропии системы ΔS после открытия крана и достижения равновесного состояния. Стенки баллона и трубки обеспечивают полную теплоизоляцию газов от окружающей среды.

218. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен поршнем пренебрежимо малой массы на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ с массой M, относительной молекулярной массой μ и молярными теплоемкостями C_V и C_P, не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня создан высокий вакуум. Начальные температура и давление газа T_0 и P_0. Поршень отпускают, и он, свободно двигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого, постепенно увеличивая давление на поршень, медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найти изменения внутренней энергии и энтропии газа при таком процессе.

219. Найти изменение энтропии ΔS 30 г льда при превращении его в пар, если начальная температура льда —40 °C, а температура пара 100 °C. Теплоемкости воды и льда считать постоянными, а все процессы — происходящими при атмосферном давлении. Удельная теплоемкость льда $c=0{,}5$ кал/(г·°C).

220. Найти суммарное изменение энтропии ΔS (воды и железа) при погружении 100 г железа, нагретого до 300 °C, в воду при температуре 15 °C. Удельная теплоемкость железа равна $c=0{,}11$ кал/(г·°C).

221. Найти удельную энтропию s неоднородной системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара. Теплоем-

кость жидкости считать не зависящей от температуры.

222. Два тела A и B, нагретые до разных температур, помещены в жесткую адиабатическую оболочку и приведены в тепловой контакт друг с другом. Тепло переходит от более нагретого тела A к менее нагретому телу B, пока температуры обоих тел не сравняются. Показать, что при этом процессе энтропия системы $A+B$ увеличивается.

223. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu=10$ молей, находящийся при температуре $T_1=300$ K, расширяется без подвода и отдачи тепла в пустой сосуд через турбину, необратимым образом совершая работу (рис. 24). После

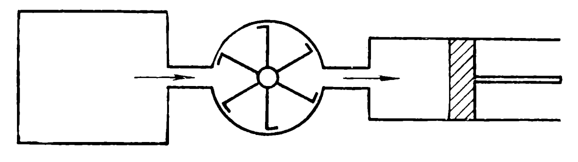


Рис. 24.

установления равновесия температура газа понижается до $T=200$ K. После этого газ квазистатически сжимается: сначала изотермически, а затем адиабатически, возвращаясь в первоначальное состояние. При этом сжатии затрачивается работа $A=15$ кДж. Найти изменение энтропии газа при расширении.

224. В расположенном горизонтально теплоизолированном жестком цилиндре может перемещаться поршень, по одну сторону от которого находятся $\nu=2$ моля двухатомного идеального газа, а по другую — вакуум. Между поршнем и дном цилиндра находится пружина. В начальный момент поршень закреплен, а пружина не деформирована. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем газа увеличился в $n=2$ раза. Определить изменение энтропии газа. При расчете пренебречь трением, а также теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины. Считать, что к деформациям пружины применим закон Гука.

225. Наряду с внутренней энергией U и энтальпией $I=U+PV$ в термодинамике широко пользуются функциями $\Psi=U-TS$ и $\Phi=\Psi+PV$. Первая из них называется свободной энергией, а вторая — термодинамическим потенциалом системы. Доказать, что эти функции удовлетворяют

соотношениям

$$\left.\begin{aligned} dU &= T\,dS - P\,dV, \quad & d\Psi &= -S\,dT - P\,dV, \\ d\Phi &= -S\,dT + V\,dP, \quad & dI &= T\,dS + V\,dP, \end{aligned}\right\} \quad (225.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \quad T = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_P, \quad S = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_V, \\ &S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P, \quad P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S, \quad V = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_S, \\ &\qquad P = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial V}\right)_T, \quad V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T. \end{aligned}\right\} \quad (225.2)$$

226. Доказать соотношения

$$U = \Psi - T\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_V, \quad I = \Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P. \quad (226.1)$$

227. Доказать соотношения Максвелла

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \\ &\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \end{aligned}\right\} \quad (227.1)$$

228. Пользуясь методом термодинамических функций (соотношениями Максвелла), найти производные $(\partial U/\partial V)_T$ и $(\partial I/\partial P)_T$. (Ср. с задачами 175 и 176.)

229. В чем ошибочность следующего рассуждения? Элементарное количество тепла dQ, полученное физически однородным телом при квазистатическом процессе, равно

$$dQ = dU + P\,dV = dI - V\,dP,$$

или

$$dQ = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P dT + \left[\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T - V\right] dP;$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right) = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P, \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T - V,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial T\,\partial P} = \frac{\partial^2 I}{\partial T\,\partial P}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial P\,\partial T} = \frac{\partial^2 I}{\partial P\,\partial T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Приравнивая оба выражения, получим $(\partial V/\partial T)_P = 0$; отсюда следует, что тепловое расширение тел невозможно.

230. Пользуясь условием, что дифференциальное выражение $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ есть полный дифференциал,

доказать, что элементарная работа δA не может быть полным дифференциалом.

231. Используя понятие энтропии и соотношения Максвелла, получить выражение для разности теплоемкостей $C_P - C_V$. (Ср. с решением задачи 182.)

232. Доказать соотношения

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -C_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - P, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = -C_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S + V.$$

233. Методом якобианов доказать соотношения

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

234. Доказать, что если внутренняя энергия физически однородного тела не зависит от его объема, а зависит только от температуры, то она не зависит и от давления. То же справедливо и для энтальпии.

235. Пользуясь методом якобианов, найти отношение адиабатического модуля всестороннего сжатия к его изотермическому модулю. (Ср. с решением задачи 137.)

236. Доказать соотношения

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P = \frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P.$$

237. Показать, что при квазистатическом расширении физически однородного тела при постоянном давлении его энтропия возрастает, если температурный коэффициент расширения положителен, и убывает, если этот коэффициент отрицателен.

238. Показать, что при квазистатическом увеличении давления на физически однородное тело при постоянном объеме его энтропия возрастает, если температурный коэффициент давления положителен, и убывает, если этот коэффициент отрицателен.

239. Методом якобианов доказать соотношения

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

(Ср. с задачами 243 и 246.)

240. Из опыта известно, что резиновый жгут удлиняется при охлаждении (если его натяжение остается постоянным). Пользуясь этим, доказать, что жгут нагреется, если его адиабатически растянуть.

241. Из измерений найдено, что натяжение резинового жгута определяется выражением $\tau = A(l)T$, где T — абсолютная температура, а функция $A(l)$ зависит только от длины жгута ($A>0$). Показать, что внутренняя энергия такого жгута U не зависит от его длины, а энтропия при изотермическом увеличении длины уменьшается.

242. Доказать соотношения

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_V = C_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S =$$
$$= -\frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S =$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T - \frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2,$$

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\frac{\partial^2 T}{\partial P\,\partial V} + \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - \frac{\partial C_V}{\partial V_P}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1.$$

243. Физически однородное и изотропное вещество расширяется (или сжимается) адиабатически и квазистатически от давления P_1 до давления P_2. Найти изменение его температуры $T_2 - T_1$ в этом процессе.

244. Воду, находящуюся при 0 °С и давлении $P = 100$ атм, расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры воды в этом процессе, если коэффициент объемного расширения воды в этих условиях отрицателен и равен $\alpha = -6{,}1 \cdot 10^{-5}$ °С$^{-1}$.

245. Ртуть, находящуюся при 0 °С и давлении $P = 100$ атм, расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры ртути в этом процессе, если коэффициент объемного расширения ртути в этих условиях положителен и равен $\alpha = 1{,}81 \cdot 10^{-4}$ °С$^{-1}$, удельная теплоемкость ртути $c_P = 0{,}033$ кал/(г·°С), плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

246. Доказать соотношение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

247. Показать, что при квазистатическом адиабатическом расширении тела его температура понижается, если температурный коэффициент давления положителен, и повышается, если этот коэффициент отрицателен.

248. Показать, что при квазистатическом адиабатическом уменьшении давления на тело его температура понижается, если коэффициент расширения положителен, и повышается, если этот коэффициент отрицателен.

249. Железная проволока радиуса $r=1$ мм квазистатически и адиабатически нагружается при температуре $T=273$ К. Начальное значение растягивающей силы равно нулю, конечное $F=10$ Н. Определить изменение температуры проволоки ΔT. Коэффициент линейного расширения железа $\beta=1{,}2\cdot10^{-5}\ ^\circ\text{C}^{-1}$, удельная теплоемкость железа $c=0{,}44$ Дж/(г·°С), плотность $\rho=7{,}9$ г/см^3.

250. В объеме $V_1=3$ л находится $\nu_1=0{,}5$ моля кислорода O_2, а в объеме $V_2=2$ л — $\nu_2=0{,}5$ моля азота N_2 при температуре $T=300$ К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена за счет изотермического смешения этих газов в суммарном объеме V_1+V_2.

251. Решить предыдущую задачу в предположении, что смешивание газов производится адиабатически. Начальная температура газов $T_1=300$ К.

252. В процессе Джоуля — Томсона энтальпия газа не изменяется. Пользуясь этим, найти общее термодинамическое выражение для изменения температуры в таком процессе (эффект Джоуля — Томсона).

253. Показать, что для идеальных газов эффект Джоуля — Томсона не имеет места ($\Delta T=0$).

254. В одном из методов получения низких температур используют охлаждение газа при его дросселировании через вентиль (эффект Джоуля — Томсона). В другом методе используют охлаждение газа при его обратимом адиабатическом расширении. Показать, что при одних и тех же начальном P_1 и конечном P_2 давлениях ($P_1>P_2$) понижение температуры во втором методе больше, чем в первом.

255. Показать, что в процессе Джоуля — Томсона энтропия газа увеличивается.

256. Сосуд с твердыми адиабатическими стенками разделен на две части твердой адиабатической перегородкой. По

одну сторону перегородки находится газ, по другую — вакуум. Вывести общую термодинамическую формулу для температуры газа, которая установится в нем после удаления перегородки. Применить полученную формулу к идеальному газу и показать, что в этом случае изменения температуры не произойдет.

257. С помощью второго начала термодинамики найти условие конвективной устойчивости неравномерно нагретой жидкости или реального газа в однородном поле тяжести. Теплопроводность жидкости или газа считать пренебрежимо малой. (См. задачу 133.)

§ 5. Теплопроводность

258. Стальной стержень длины $l=20$ см с площадью поперечного сечения $S=3$ см^2 нагревается с одного конца до температуры $t_1=300$ °С, а другим концом упирается в лед. Предполагая, что передача тепла происходит исключительно вдоль стержня (без потерь через стенки), подсчитать массу m льда, растаявшего за время $\tau=10$ мин. Теплопроводность стали $\varkappa=0,16$ кал/(с·см·°С).

259. Медный кофейник нагревается на примусе. Вода доведена до кипения и выделяет каждую минуту $m=2$ г пара. Толщина дна кофейника $l=2$ мм, а площадь $S=300$ см^2. Определить разность температур t_2-t_1 между внутренней и наружной поверхностями дна кофейника, предполагая, что все дно нагревается равномерно. Теплопроводность меди $\varkappa=0,92$ кал/(с·см·°С).

260. Решить предыдущую задачу, если дно кофейника с внутренней стороны покрыто слоем накипи толщины $l_1=1$ мм. Теплопроводность накипи $\varkappa_1=0,003$ кал/(с·см·°С).

261. Три пластинки одинакового размера сложены вместе, образуя столбик. В середине — свинцовая пластинка, по краям — серебряные. Внешняя сторона одной серебряной пластинки поддерживается при постоянной температуре $t=100$ °С. Внешняя сторона другой серебряной пластинки имеет температуру $t_3=0$ °С. Найти температуры t_1 и t_2 в местах соприкосновения свинцовой пластинки с серебряными. Теплопроводности свинца $\varkappa_1=30$ ккал/(ч·м·°С), серебра $\varkappa=360$ ккал/(ч·м·°С).

262. Кубик сделан из чередующихся пластинок разной толщины и разной теплопроводности. Толщина пластинок одного типа равна b_1, теплопроводность материала, из ко-

торого они сделаны, равна $\varkappa_1$, число всех пластинок этого типа n_1. Соответствующие величины для пластинок второго типа равны b_2, $\varkappa_2$ и n_2. Найти теплопроводности материала кубика вдоль пластинок $\varkappa_{\parallel}$ и перпендикулярно к ним $\varkappa_{\perp}$. Какая из этих теплопроводностей больше?

263. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра t_1, а внешнего t_2.

264. Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2, заполненном проводящим тепло однородным веществом, если температуры обеих сфер постоянны и равны t_1 и t_2.

265. Урановый шар радиуса $R=10$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $q=100$ Вт/см^3. Температура воды $T=373$ К, теплопроводность урана $\varkappa=400$ Вт/(м·°С). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

266. По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0.

267. Для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в дейтерии (или в смеси дейтерия с тритием) необходимо нагреть вещество до температуры порядка 10^8 К. При таких температурах вещество находится в состоянии плазмы, т. е. полностью ионизованного газа. При этом сильно возрастают потери энергии за счет теплопроводности. Как показывает теория (см. задачу 449), теплопроводность плазмы пропорциональна абсолютной температуре в степени $^5/_2$, т. е. $\varkappa=aT^{5/2}$, где для дейтериевой или тритиевой плазмы в системе СГС $a\approx 10^{-6}$. Внутри малого объема, выделенного в плазме и имеющего форму шара радиуса $r_0=1$ см, поддерживается температура $T=10^8$ К. Вне шара температура убывает в соответствии с законами теплопроводности. Какую мощность надо подводить к этому объему, чтобы компенсировать потери энергии за счет теплопроводности? К остальным частям плазмы энергия не подводится.

268. Стержень сечения S упирается концами в твердые пластины, расстояние L между которыми поддерживается постоянным. Затем температуру одной из пластин повышают, и в стержне устанавливается постоянный поток тепла Q. Какое давление P действует на единицу поперечного сечения стержня, если начальное напряжение в стержне было равно нулю? Теплопроводность стержня $\varkappa$, коэффициент линейного расширения α, модуль Юнга E.

269. Показать, что решение одномерного уравнения теплопроводности в однородной среде

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x, T) \qquad (269.1)$$

единственное, если заданы начальное и краевые условия:

$$T_{t=0} = f(x), \qquad (269.2)$$

$$T_{x=0} = \varphi_1(t), \quad T_{x=l} = \varphi_2(t). \qquad (269.3)$$

Плотность мощности источника тепла $q(x, t)$, а также функции $f(x)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ предполагаются заданными.

270. Два теплоизолированных тела *1* и *2* с бесконечными теплопроводностями (например, два куска металла) соединены между собой однородным, также теплоизолированным стержнем длины l с площадью поперечного сечения S и теплопроводностью $\varkappa$. Теплоемкости тел C_1 и C_2 очень велики по сравнению с теплоемкостью стержня. Найти температуры тел T_1 и T_2 в любой момент времени t, если при $t=0$ они были равны соответственно T_{10} и T_{20}. Найти также разность этих температур и время $t_{1/2}$, по истечении которого она уменьшается в два раза.

271. Определить толщину льда, образующегося в течение заданного времени t на спокойной поверхности озера. Считать, что температура T окружающего воздуха все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда ($T < T_{пл}$, где $T_{пл}$ — температура плавления льда). Произвести численный расчет, предполагая, что $T = -10\,°C$. Для льда $\varkappa = 2{,}22 \cdot 10^5$ эрг/(с·см·°C), $q = 3{,}35 \cdot 10^9$ эрг/г, $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

272. Сферический кусок льда (с начальным радиусом $R_0 = 1$ см) погружен в большую массу воды с температурой 10 °C. Предполагая, что теплопередача в жидкости связана только с ее теплопроводностью, определить время τ, в течение которого лед полностью растает. Теплопроводность воды $\varkappa = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж/(с·см·°C), удельная теплота плавления льда $q = 330$ Дж/г.

273. Тело, помещенное в среду с постоянной температурой t_0, охладилось от температуры $t_1=80$ °C до температуры $t_2=64$ °C в течение времени τ и до температуры $t_3=52$ °C в течение времени 2τ. Считая справедливым закон охлаждения Ньютона, найти температуру окружающей среды t_0. До какой температуры t_4 тело охладится в течение времени 3τ?

274. Определить количество тепла Q, теряемое 1 м² стены в течение времени τ, равного одним суткам, при температуре воздуха в помещении $t_1=20$ °C и температуре наружного воздуха $t_4=-10$ °C. Толщина стены $l=20$ см. Теплопроводность материала стены $\varkappa=0{,}003$ кал/(с·см·°C). Коэффициент теплообмена на границе стена — воздух $\alpha=0{,}0002$ кал/(с·см²·°C). Определить также температуры внутренней t_2 и внешней t_3 поверхностей стены.

275. Сколько каменного угля нужно сжигать в течение времени τ, равного одним суткам, на водяное отопление дома, площадь поверхности стен и крыши которого равна $S=10\,000$ м², чтобы поддерживать в квартирах температуру $t_1=18$ °C, если температура снаружи здания $t_2=-22$ °C? Толщина стен $L=60$ см, теплопроводность материала стен $\varkappa=0{,}002$ кал/(с·см·°C), а утечка тепла с единицы поверхности крыши такая же, как с единицы поверхности стены. Коэффициент теплообмена на границе воздух — стена $\alpha=0{,}00025$ кал/(с·см²·°C), удельная теплота сгорания угля $q=7500$ кал/г.

276. В тонкостенный замкнутый металлический сосуд налита жидкость, имеющая температуру t_1. Температура воздуха вне сосуда t_3. Найти температуру t_2 внешней стенки, если известно, что теплопроводность металла $\varkappa$, коэффициент теплообмена на границе металл — воздух α, а на границе металл — жидкость ∞. Толщина стенки равна L.

Примечание. Сосуд считается тонкостенным, когда толщина стенок мала по сравнению с его линейными размерами.

277. Определить температуру t_2 в предыдущей задаче в двух предельных случаях: 1) очень тонкого металлического сосуда и 2) сосуда из материала с очень малой теплопроводностью.

278. В тонкостенный замкнутый металлический сосуд с общей поверхностью S налита жидкость при температуре t_1. Через сколько времени τ жидкость охладится до температуры t_2, если масса ее m, удельная теплоемкость c, тем-

пература воздуха вне сосуда t_3, а коэффициент теплообмена на границе металл — воздух равен α?

279. По длинной тонкостенной медной трубе радиуса $r=1$ см, покрытой цилиндрическим теплоизолирующим слоем, течет горячая вода. Теплопроводность изолирующего слоя $\varkappa=6\cdot 10^{-4}$ кал/(с·см·°С), коэффициент теплообмена трубы с изолирующим слоем $\alpha=5\cdot 10^{-4}$ кал/(с·см²·°С). 1) При каком значении внешнего радиуса R изолирующего слоя потери тепла максимальны? 2) При каком R потери тепла уменьшатся вдвое по сравнению с потерями для трубы, лишенной тепловой изоляции?

280. На концах длинного однородного стержня, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной, задаются температуры t_1 и t_2, которые могут меняться во времени. Температура однородной среды, окружающей стержень, равна t_3. Показать, что благодаря теплообмену температура в стержне подчиняется уравнению

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a^2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-b^2(t-t_3),$$

где $a^2\equiv\chi=\dfrac{\varkappa}{c\rho}$, $b^2=\dfrac{\alpha p}{c\rho S}$, p — периметр поперечного сечения стержня, S — площадь этого сечения, c — удельная теплоемкость вещества стержня, ρ — его плотность, α — коэффициент теплообмена, $\varkappa$ — теплопроводность.

281. Найти установившееся распределение температуры вдоль длинного и очень тонкого стержня длины l, если температуры его концов t_1 и t_2, а также температура окружающей среды t_3 поддерживаются постоянными. Остальные величины такие же, как в предыдущей задаче.

282. Решить предыдущую задачу в предположении, что $t_3=t_2$. Рассмотреть случай очень длинного стержня.

283. Вычислить температуру средней точки круглого стержня длины $l=80$ см, радиуса $r=2$ см с теплопроводностью $\varkappa=0{,}8$ кал/(с·см·°С) и коэффициентом теплообмена $\alpha=5\cdot 10^{-4}$ кал/(с·см²·°С), если оба конца стержня поддерживаются при одной и той же температуре $t_1=t_2=100$ °С, а температура комнаты $t_3=20$ °С.

284. Сурьмяный и медный стержни покрыты очень тонким слоем парафина и своими концами упираются в стенку металлического сосуда, наполненного кипящей водой. Через некоторое время, по достижении стационарного состояния, плавление парафина прекращается на расстоянии x_1 от стенки сосуда на сурьмяном стержне и на расстоянии x_2

на медном. Теплопроводность сурьмы $\varkappa_1$. Определить теплопроводность меди $\varkappa_2$.

285. Для определения теплопроводностей жидкостей используются три медные пластинки, расположенные горизонтально одна над другой. Нижняя пластинка омывается потоком холодной воды (температура t_1), верхняя — теплой (температура t_3). Пространство между нижней и средней пластинками заполнено жидкостью с теплопроводностью $\varkappa_1$, а пространство между средней и верхней — жидкостью с теплопроводностью $\varkappa_2$. Расстояние средней пластинки от нижней равно d_1, а от верхней — d_2. Выразить теплопроводность $\varkappa_2$ через $\varkappa_1$, если в установившемся состоянии температура средней пластинки равна t_2. В случае, когда в качестве известной жидкости взята вода ($\varkappa_1 = 0{,}00143$ кал/(с·см·°C), а в качестве испытуемой — бензол, для расстояний $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 1{,}2$ мм получились температуры $t_1 = 80$ °C, $t_2 = 68{,}6$ °C, $t_3 = 10$ °C. Найти $\varkappa_2$ для бензола.

286. Температура одного конца однородного стержня равна t_1, а другого t_2, причем температура окружающей среды равна нулю. Показать, что в стационарном состоянии между температурами Θ_1, Θ_2 и Θ_3 трех равноотстоящих друг от друга сечений стержня, находящихся на расстояниях x, $x+d$ и $x+2d$ от его начала, существует следующее соотношение:

$$\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{\Theta_2} = e^{\beta d} + e^{-\beta d},$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha p}{\varkappa S}},$$

причем α — коэффициент теплообмена, $\varkappa$ — теплопроводность, p — периметр и S — площадь поперечного сечения стержня.

287. Для определения теплопроводностей стержней иногда применяют следующий метод. Если температуру окружающей среды принять за нуль, то между температурами Θ_1, Θ_2 и Θ_3 трех равноотстоящих друг от друга сечений стержня, нагреваемого с одного конца, в стационарном состоянии существует зависимость:

$$\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{\Theta_2} = e^{\beta d} + e^{-\beta d} = 2n,$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha \rho}{\varkappa S}}$$

(см. предыдущую задачу). Величину $2n$ можно определить непосредственными измерениями. Если имеются два стержня из разных материалов, то, определив из нескольких измерений величину $2n$ для одного из них и $2n_1$ для другого, можно определить отношение теплопроводностей по формуле

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \left[\frac{\ln(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\ln\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 - 1}\right)}\right]^2,$$

если только стержни имеют одинаковые поперечные размеры S и равные коэффициенты теплообмена α. Вывести эту формулу.

288. Полупространство $x > 0$ заполнено веществом с температуропроводностью $a^2 = \varkappa/(c\rho)$. В плоскости $x = 0$ происходят гармонические колебания температуры с периодом T:

$$t = t_0 + t_1 \cos \omega\tau,$$

где t_0 и t_1 — постоянные, а $\omega = 2\pi/T$. Найти температуру среды в зависимости от координаты x и времени τ.

Указание. Искать решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ в комплексной форме $t - t_0 = X(x)\, e^{i\omega\tau}$, а затем перейти к вещественной форме.

289. Найти выражение для фазовой скорости v и коэффициента затухания γ температурных волн.

290. Опыт показывает, что температурные волны с периодом в одни сутки распространяются внутрь Земли со скоростью 1 м/сут. Найти скорость распространения волн с периодом в 1 год.

291. Во сколько раз коэффициент затухания годовых температурных волн γ_1 меньше коэффициента затухания суточных температурных волн γ_2?

292. При каком условии распространение звука в безграничной однородной среде может рассматриваться как адиабатический процесс?

293. При каком условии распространение звука в стержне радиуса r может рассматриваться как адиабатический процесс, если температуропроводность окружающей среды пренебрежимо мала по сравнению с температуропроводностью стержня?

294. Однородная среда заполняет полупространство, ограниченное плоскостью $x = 0$. В начальный момент времени $t = 0$ температура среды всюду одинакова и равна T_0.

Температура на поверхности среды все время поддерживается постоянной и равной $T_1 \neq T_0$. Найти распределение температуры $T(x, t)$ в среде во все последующие моменты времени. Найти также градиент температуры вблизи границы среды.

295. В. Томсон вычислил возраст Земли, исходя из следующих предположений: Земля является однородным телом, температура которого в момент затвердевания по всей массе была равна температуре затвердевания горных пород $T_0 \approx 4000$ °C, а температура поверхности Земли с момента ее затвердевания оставалась постоянной и равной 0 °C. При вычислении температурного градиента вблизи поверхности Земли В. Томсон заменил ее однородной средой, ограниченной плоской поверхностью и занимающей бесконечное полупространство $x > 0$ (см. предыдущую задачу). Вычислить в этих предположениях возраст Земли (с момента затвердевания), если вблизи земной поверхности температура Земли повышается на 1 °C при углублении в нее на каждые 25 м, а скорость распространения суточных температурных волн составляет $v = 1$ м/сут.

§ 6. Кинетическая теория вещества

296. Сколько молекул азота находится в сосуде объемом в 1 л, если температура азота 27 °C, а давление равно 10^{-6} мм рт. ст.?

297. Сколько молекул находится в одном грамме воды?

298. Сколько молекул находится в одном кубическом сантиметре воздуха при нормальном давлении и температуре 0 °C?

299. Допустим, что все молекулы воды в стакане как-то отмечены. После этого вода была вылита в водопроводный сток. По прошествии длительного времени вылитая вода равномерно перемешалась со всей водой, имеющейся на Земле. Какое количество отмеченных молекул окажется в стакане, если его вновь наполнить водопроводной водой?

300. Каково давление смеси газов в колбе объемом 2,5 л, если в ней находится 10^{15} молекул кислорода, $4 \cdot 10^{15}$ молекул азота и $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ г аргона? Температура смеси 150 °C.

301. Вычислить среднюю квадратичную скорость теплового движения молекул 1) водорода, 2) азота, 3) кислорода при 0 °C.

302. Масса крупной молекулы органического вещества $m = 10^{-18}$ г. Найти полную среднюю кинетическую энергию K теплового движения такой молекулы, взвешенной в воздухе при температуре 27 °C. Найти также среднюю квадратичную скорость молекулы при этой температуре.

303. Найти средний квадратичный импульс молекулы H_2 при температуре 27 °C.

304. Определить порядок величины максимальной скорости, с которой артиллерийский снаряд может вылететь из ствола орудия. Каким должен быть порох, чтобы эта величина была возможно большей?

305. Найти зависимость между средней квадратичной скоростью теплового движения молекулы газа $\bar{v}_{кв}$ и скоростью звука в нем $c_{зв}$.

306. Импульс фотона связан с его энергией соотношением $\varepsilon = pc$. Написать выражение для давления P фотонного газа.

307. Показать на основании кинетической теории, что при квазистатическом передвижении поршня в цилиндре, наполненном идеальным одноатомным газом, давление и объем газа связаны соотношением

$$PV^{5/3} = \text{const}.$$

Стенки цилиндра и поршень теплонепроницаемы.

Указание. Рассмотреть удар молекулы о движущийся поршень и учесть, что скорость поршня гораздо меньше скоростей ударяющихся молекул.

308. Решить предыдущую задачу для двухатомного газа. Показать, что в этом случае давление P и объем V связаны соотношением

$$PV^{7/5} = \text{const}.$$

Указание. При решении воспользоваться теоремой о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы.

309. Для применимости классического способа рассмотрения газа необходимо, чтобы его температура T была высока по сравнению с так называемой температурой вырождения. Последняя определяется выражением

$$T_g = \frac{h^2}{2km}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3},$$

где n — число молекул в единице объема, m — масса молекулы, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана [1]). Вычислить температуру вырождения для: 1) гелия ($m=6{,}6\cdot10^{-24}$ г, $n=2{,}7\cdot10^{19}$ см$^{-3}$), 2) электронного газа в серебре ($m=9{,}11\cdot10^{-22}$ г, $n\approx6\cdot10^{22}$ см$^{-3}$).

310. Восемь граммов кислорода занимают объем $V=560$ л. Определить давление этого газа в том же объеме при температуре: 1) $T=820$ К, 2) $T=10$ кэВ, когда атомы кислорода полностью ионизованы.

311. Найти отношение числа молекул водорода n_1, скорости которых лежат в пределах от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул n_2, имеющих скорости в пределах от 1500 до 1510 м/с, если температура водорода 300 °С.

312. Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат x-компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

313. Найти наиболее вероятную v_m, среднюю $\bar{v}$ и среднюю квадратичную $\bar{v}_{кв}$ скорости молекул хлора при температуре 227 °С.

314. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна таковой же скорости молекул азота при температуре 100 °С?

315. Показать, что если за единицу скорости молекул газа принять наиболее вероятную скорость, то число молекул, абсолютные значения скоростей которых лежат между v и $v+dv$, не будет зависеть от температуры газа.

316. Как зависит от давления средняя скорость молекул идеального одноатомного газа при адиабатическом сжатии или расширении?

317. Написать выражение для среднего числа dN молекул газа, кинетические энергии которых заключены между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$.

318. Найти наивероятнейшее значение кинетической энергии ε поступательного движения молекул газа, т. е. такое значение ε_m, при котором в фиксированный интервал энергии $d\varepsilon$ в газе находится максимальное число молекул.

319. При каком значении температуры число молекул, находящихся в пространстве скоростей в фиксированном интервале $(v,\ v+dv)$, максимально?

---

[1]) Условие $T\gg T_g$ означает, что среднее расстояние между молекулами газа должно быть велико по сравнению с длиной волны де-Бройля молекул, движущихся с тепловыми скоростями.

320. Вычислить скорость $v_{1/2}$ теплового движения молекулы газа, определяемую условием, что половина молекул движется со скоростью, меньшей, чем $v_{1/2}$, а другая половина — со скоростью, большей, чем $v_{1/2}$.

321. Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.

322. Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале $(v_{\parallel}, v_{\parallel}+dv_{\parallel})$, а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости заключены между $v_{\perp}$ и $v_{\perp}+dv_{\perp}$.

323. В диоде электроны, эмиттируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмиттируемых электронов (вышедших из катода) распределены по закону Максвелла с температурой $T=1150$ К, определить долю электронов α, преодолевающих задерживающий потенциал: 1) $V=0{,}2$ В; 2) $V=0{,}4$ В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

324. На рис. 25 изображено горизонтальное сечение прибора, использованного в известном опыте Штерна по определению скорости молекул и атомов. Найти скорость атомов серебра, испаряющихся с центральной нити прибора, если при $n=50$ об/с на внешнем цилиндре смещение следа молекулярного пучка при вращающемся приборе по отношению к следу пучка в неподвижном приборе составило $\delta=4{,}8$ мм. Сопоставить результаты расчета скорости атомов серебра из приведенных данных с расчетом той же скорости при помощи соотношения между средней квадратичной скоростью атомов и температурой газа. Температура нити в том опыте Штерна, для которого приведены указанные выше данные, была равна 1607 °С (1880 К), $R=10$ см.

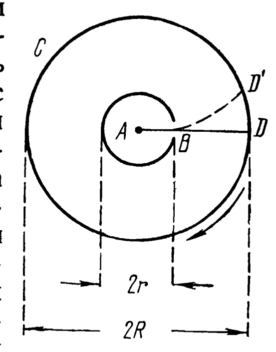


Рис. 25.

325. В опыте Штерна (рис. 25) на поверхности вращающегося цилиндра C конденсируются молекулы серебра с различными скоростями. Каким скоростям молекул, попадающих на пластинку DD', соответствует ее наибольшее почернение?

326. Выразить число молекул z, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки сосуда в одну секунду, через среднюю скорость движения газовых молекул, если функция распределения молекул по скоростям изотропна (т. е. зависит только от абсолютного значения скорости молекулы, но не от ее направления). Рассмотреть частный случай максвелловского распределения.

327. Найти полную кинетическую энергию E молекул одноатомного газа, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки в единицу времени. Задачу решить сначала в общем виде для изотропной функции распределения, а затем применить результат к частному случаю максвелловского распределения.

328. В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при температуре T, имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение $\bar{\varepsilon}$ кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы [1]).

329. В тонкостенном сосуде объема V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ. Сосуд помещен в вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул n газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие площади S? Определить время $t_{1/2}$, по истечении которого давление газа внутри сосуда уменьшится в два раза. Считать, что истечение газа происходит настолько медленно, что оно практически не нарушает равновесность состояния во всем сосуде, за исключением малой области вблизи отверстия. Температуру газа в сосуде считать постоянной и равной внешней температуре.

330. Откачанный тонкостенный сосуд, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, погружен в атмосферу идеального газа с постоянной концентрацией молекул n_0, поддерживаемого при той же температуре. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие?

331. Через какое время давление воздуха в тонкостенном откачанном сосуде, в стенке которого имеется отверстие пло-

---

[1]) В задачах 328—336 предполагается, что размеры отверстия и толщина стенок малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа.

щадью $S=10^{-6}$ см², возрастает от $P_1=10^{-4}$ мм рт. ст. до $P_2=10^{-2}$ мм рт. ст., если давление наружного воздуха $P_0=760$ мм рт. ст., а температура 20 °С? Объем сосуда $V=1$ л. Через какое время давление в сосуде станет равным половине атмосферного давления?

332. Сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом V каждая. В одной части находится азот, а в другой кислород при одинаковых давлениях P и температурах T. Газы в сосуде сильно разрежены (средняя длина свободного пробега велика по сравнению с размерами сосуда). В момент $t=0$ в перегородке открывается небольшое отверстие площади S. Найти давление в обеих частях сосуда в зависимости от времени. Температуру газа во все время процесса считать неизменной. Результат выразить через средние скорости молекул азота и кислорода $\bar{v}_а$ и $\bar{v}_к$.

333. Полностью эвакуированный герметический сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси двух газов, молекулярные массы которых относятся как 1 : 4, а отношение концентраций (т. е. чисел молекул в единице объема) равно α. Смесь газов вне сосуда поддерживается при постоянных давлении и температуре. В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое оба газа стали очень медленно натекать в сосуд. Определить максимальное и минимальное значения отношения концентраций легкой и тяжелой компонент газовой смеси в сосуде и моменты времени, когда достигаются эти значения.

334. Полностью эвакуированный тонкостенный герметический сосуд помещен в атмосферу кислорода, поддерживаемого при постоянной температуре и невысоком давлении P. В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое окружающий кислород стал натекать в сосуд. Через час давление газа в сосуде повысилось от нуля до $P/2$. Какое давление было бы в том же сосуде через то же время, если бы после откачки сосуд был помещен в атмосферу водорода при тех же давлении и температуре?

335. Тонкостенный сосуд объема V, наполненный идеальным газом, поддерживается при постоянной температуре T. В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площади S, через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Какое количество тепла $Q=Q(t)$ надо подводить к сосуду в единицу времени для поддержания в нем постоянной температуры?

336. В тонкостенном сосуде, помещенном в вакууме, имеется очень малое отверстие, на которое извне направля-

ется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одной и той же скоростью v_0, перпендикулярной к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке равна n_0. Найти среднюю скорость $\bar{v}$, концентрацию молекул n и температуру T газа в сосуде в установившемся равновесном состоянии.

337. Определить, какая часть молекул идеального газа, столкнувшихся со стенкой сосуда за определенное время (например, за одну секунду), имеет кинетическую энергию, превосходящую ε.

338. Вольфрамовая нить, испаряясь в высокий вакуум при температуре $T=2000$ К, уменьшается в массе, как показали измерения, со скоростью $q=1{,}14\cdot10^{-13}$ г/(с·см^2). Вычислить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

339. Какова была бы мгновенная скорость испарения воды с каждого квадратного сантиметра ее поверхности, если бы над этой поверхностью был вакуум, а температура воды в этот момент равнялась $T=300$ К? Табличное значение упругости насыщенного водяного пара при этой температуре $P=27$ мм рт. ст. Сравнить полученную величину с величиной скорости испарения воды при обычных условиях (т. е. когда над ее поверхностью находится воздух при нормальном давлении) и объяснить получившееся расхождение.

340. Отношение молекулярных масс различных газов можно измерять по скорости эффузии их, т. е. по скорости истечения из сосуда с очень малым отверстием. Доказать, что время, в течение которого из сосуда вытекает определенный объем газа, пропорционально квадратному корню из молекулярной массы газа.

341. Для определения числа Авогадро Перрен измерял распределение по высоте шарообразных частиц гуммигута, взвешенных в воде. Он нашел, что отношение α числа частиц в слоях, отстоящих друг от друга на расстояние $l=30$ мкм, равно 2,08. Плотности частиц $\rho=1{,}194$ г/см^3, воды $\rho_0=1$ г/см^3. Радиусы частиц $r=0{,}212$ мкм. На основании этих данных вычислить число Авогадро N. Температура воды $t=18\,^\circ$C.

342. Для определения относительных молекулярных масс коллоидальных частиц исследуют распределение их концентрации в поле центробежной силы, возникающей при вращении центрифуги. Найти относительную молекулярную массу μ коллоидальных частиц, если известно, что отно-

шение их концентраций в местах, расположенных от оси центрифуги на расстояниях r_2 и r_1, равно α. Плотности частиц ρ, растворителя — ρ_0. Угловая скорость вращения центрифуги ω.

343. При термодинамическом равновесии температура газа, находящегося в поле тяжести, постоянна по высоте. С молекулярно-кинетической точки зрения кажется на первый взгляд, что температура газа должна убывать с высотой, так как летящая вверх молекула замедляется полем тяжести, а летящая вниз — ускоряется. Дать качественное молекулярно-кинетическое объяснение постоянства температуры газа по высоте.

344. Теплоизолированный сосуд с идеальным газом подвешен на нити в поле тяжести. Из-за действия силы тяжести плотность газа внизу сосуда больше, чем наверху. Нить пережигают, и сосуд свободно падает. Предполагая, что во время падения успевает установиться термодинамическое равновесие, определить равновесную температуру газа, которая в нем установится при падении.

345. Пользуясь формулой Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию $\bar{\varepsilon}_{\text{пот}}$ молекулы газа в земной атмосфере, считая последнюю изотермической (с температурой T), а поле тяжести однородным. Вычислить теплоемкость газа C при этих условиях.

346. Теплоизолированный герметический цилиндрический сосуд высоты H, наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна T. Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа $\bar{\varepsilon}_{\text{пот}}$.

347. В цилиндре предыдущей задачи помещен моль идеального газа с относительной молекулярной массой μ. Найти теплоемкость этого газа, учитывая влияние поля тяжести и предполагая, что $\mu g H \ll RT$.

348. Цилиндр радиуса R и длины H, наполненный химически однородным газом, равномерно вращается в однородном поле тяжести вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω. Найти распределение концентрации молекул газа внутри цилиндра, если его ось направлена вертикально.

349. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в поле силы тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между его средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергий. Результат использовать для установления связи между

средними значениями кинетической и потенциальной энергий молекулы воздуха в поле земного тяготения. Пользуясь этим результатом, получить формулу для разности молярных теплоемкостей $C_P - C_V$, а также дать новое решение задачи 345.

350. Доказать, что гравитационное поле планеты не может удерживать неограниченно долго планетную атмосферу. Последняя должна рассеяться в окружающее пространство.

351. Скорость рассеяния планетной атмосферы в мировое пространство можно характеризовать временем рассеяния атмосферы τ. Так называют время, по истечении которого число частиц в атмосфере убывает в e раз. Оценить время рассеяния планетной атмосферы τ, предполагая, что атмосфера изотермическая и состоит из одинаковых частиц. Атмосферу считать бесконечно разреженной. В этих условиях взаимными столкновениями молекул можно пренебречь — максвелловское распределение скоростей устанавливается в результате столкновений молекул с поверхностью планеты. Молекулы выбывают из атмосферы и улетают в межпланетное пространство, если в результате столкновений с поверхностью планеты они получают скорости, превышающие вторую космическую скорость. (В проблеме рассеяния планетных атмосфер вторая космическая скорость называется скоростью убегания $v_{\text{уб}}$.) Найти время τ для атомарного и молекулярного водорода земной атмосферы, предполагая, что температура последней $T=300$ К.

352. Найти значение средней энергии $\bar{E}$, приходящейся, согласно классической кинетической теории газов, на одну степень свободы вращательного движения молекулы газа при $t=27$ °С. Найти значение средней квадратичной частоты вращения молекулы кислорода при этих условиях. Момент инерции молекулы кислорода вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии молекулы, $I_{\perp}=19{,}2\cdot 10^{-40}$ г$\cdot$см^2.

353. Найти суммарную кинетическую энергию K теплового движения всех молекул кислорода O_2, занимающих объем $V=5{,}5$ л при давлении $P=2$ атм. Считать, что температура газа настолько низка, что колебания атомов в молекулах еще не возбуждены, а вращения возбуждены полностью.

354. Какова будет средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода, если первоначально он находился при нормальных условиях, а затем был адиабатически сжат в 32 раза?

355. Смесь равных (по массе) количеств водорода и гелия при 0 °С помещена в цилиндрический сосуд объемом $V=1$ м^3, закрытый сверху движущимся без трения невесомым поршнем. Атмосферное давление $P=740$ мм рт. ст. Какое количество тепла по классической теории потребуется для нагревания смеси до 200 °С?

356. Подсчитать по классической теории удельную теплоемкость при постоянном давлении газа следующего молярного состава:

$$\text{He}-20\%;\quad H_2-30\%;\quad CH_4-50\%.$$

(Молярный состав указывает отношение количества молей данного газа к общему количеству молей всей смеси газов.)

357. Вычислить по классической теории количество тепла Q, необходимое для нагревания воздуха от температуры $T_1=273$ К до температуры $T_2=298$ К при постоянном объеме $V_1=30$ м^3, если первоначально он находился при нормальном атмосферном давлении P_1.

358. Вычислить по классической теории количество тепла Q, необходимое для нагревания воздуха от температуры $T_1=273$ К до температуры $T_2=303$ К при постоянном давлении, если первоначально он находился при нормальном атмосферном давлении P_1 и занимал объем $V_1=50$ м^3.

359. Вычислить по классической теории количество тепла Q, которое надо подвести к молю двухатомного идеального газа при его изобарическом обратимом нагревании, если в процессе нагрева газ совершил внешнюю работу $A=20$ Дж.

360. Вычислить по классической теории количество тепла Q, которое надо подвести, чтобы квазистатически повысить температуру в комнате от $T_1=290$ К до $T_2=294$ К. (Из-за наличия щелей и пор в стенах комнаты давление воздуха в ней в каждый момент равно внешнему давлению $P=1$ атм.) Объем комнаты $V=30$ м^3.

361. Удельные теплоемкости кобальта и золота соответственно $c_1=0{,}104$ кал/(г·°С) и $c_2=0{,}0312$ кал/(г·°С). Определить их атомные теплоемкости C_1 и C_2.

362. Определить молярную теплоемкость при постоянном объеме твердых соединений типа XV и XV_2, считая справедливой классическую статистику.

363. Определить удельную теплоемкость при постоянном объеме кислорода, нагретого до очень высокой температуры (порядка нескольких килоэлектронвольт).

364. При взрыве атомной (урановой) бомбы в ее центре достигаются температуры порядка $T \approx 10$ кэВ. Принимая ориентировочно плотность урана в центре бомбы равной $\rho = 20$ г/см³, найти давление внутри бомбы при этой температуре. Сравнить это давление с давлением в центре Земли, вычисленным в предположении, что плотность Земли постоянна и равна $\rho_З = 5{,}5$ г/см³. Давление светового излучения не учитывать.

365. По одной из старых теорий (Гельмгольц, 1854 г.; лорд Кельвин, 1861 г.) солнечное излучение поддерживается за счет тепла, образующегося при сжатии Солнца. Предполагая, что Солнце представляет собой однородный шар, плотность вещества которого на любых расстояниях от центра одна и та же, подсчитать, какое количество тепла Q образуется, если радиус Солнца уменьшится от R_1 до R_2. На сколько лет хватит выделившегося тепла, если предположить, что интенсивность солнечного излучения постоянна во времени и если радиус Солнца уменьшится на 1/10 своей первоначальной величины ($R_2 = 0{,}9\ R_1$)? Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, средний радиус $R_1 = 6{,}95 \cdot 10^{10}$ см, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ дин·см²/г², солнечная постоянная $A = 1{,}39 \cdot 10^6$ эрг/(с·см²), среднее расстояние Земли от Солнца $1{,}5 \cdot 10^{13}$ см. Оценить также, насколько повысилась бы температура Солнца, если бы сжатие произошло внезапно. Теплоемкость солнечного вещества можно грубо оценить, предполагая, что Солнце целиком состоит из водорода. (Это дает завышенное значение для теплоемкости. По современным данным масса Солнца состоит приблизительно на 70—80% из водорода.)

366. Определить постоянную адиабаты для газовой смеси, содержащей ν_1 молей водорода и ν_2 молей гелия. Рассмотреть частный случай, когда смесь содержит одинаковые (по массе) количества этих газов.

367. Найти выражение для скорости звука в смеси $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ молей различных идеальных газов при температуре T.

368. Вычислить скорость звука в кислороде при температуре $T = 1$ кэВ.

369. Найти значения средней колебательной энергии теплового движения для двух различных атомных осцилляторов при температуре 27 °С. Частота колебаний одного осциллятора $\nu_1 = 10^{13}$ с$^{-1}$, а другого $\nu_2 = 10^{14}$ с$^{-1}$. Сравнить найденные значения этих энергий со значением средней энергии $\bar{E}_{кл}$, приходящейся на одну степень свободы коле-

бательного движения, согласно теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

370. Найти характеристические температуры для колебаний атомов в молекулах H_2, O_2 и HCl, если частоты колебаний атомов в этих молекулах равны соответственно $\nu_{H_2}=12{,}7\cdot10^{13}$ с$^{-1}$, $\nu_{O_2}=4{,}7\cdot10^{13}$ с$^{-1}$, $\nu_{HCl}=8{,}75\cdot10^{13}$ с$^{-1}$. Характеристической температурой Θ в теории теплоемкости принято называть ту минимальную температуру, при которой $\Delta E=k\Theta$, где ΔE — минимальная энергия возбуждения системы и k — постоянная Больцмана.

371. Найти молярную колебательную теплоемкость C_V кислорода при температуре 27 °C, если частота валентных колебаний молекулы O_2 равна $\nu=4{,}7\cdot10^{13}$ с$^{-1}$. (См. предыдущую задачу.)

372. Найти характеристическую температуру для вращения молекул H_2 и O_2, если моменты инерции этих молекул имеют значения соответственно $I_{H_2}=0{,}47\cdot10^{-40}$ г·см^2 и $I_{O_2}=19{,}2\cdot10^{-40}$ г·см^2. (Ср. с задачей 370.)

373. Показать, что при достаточно высокой температуре атомная теплоемкость твердого тела должна быть равна $C_V=3R\approx6$ кал/(моль·°C).

374. По классической теории молярная теплоемость водорода $C={}^5/_2\,R$. Какие отклонения от этого значения нужно ожидать при достаточно низких температурах?

375. Вычислить среднюю энергию $\bar{E}$ моля одноатомного газа, состоящего из молекул, имеющих два дискретных уровня энергии: ε_1 и $\varepsilon_2>\varepsilon_1$. Показать, что при очень низких температурах теплоемкость такого газа равна ${}^3/_2\,R$. Вращением молекул пренебречь. Для упрощения записи формул принять $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=\varepsilon$.

376. Вычислить по квантовой теории молярные теплоемкости C_V и C_P углекислого газа CO_2 при 0 °C. Молекула CO_2 является линейной (O—C—O), т. е. три атома, из которых она состоит (точнее, их положения равновесия), расположены на одной прямой. Момент инерции молекулы $I=7{,}2\cdot10^{-39}$ г·см^2. Частоты нормальных колебаний молекулы по спектроскопическим данным: $\tilde{\nu}_1=\tilde{\nu}_2=667{,}3$ см$^{-1}$, $\tilde{\nu}_3=1388{,}3$ см$^{-1}$, $\tilde{\nu}_4=2349{,}3$ см$^{-1}$. Частотам $\tilde{\nu}_1$ и $\tilde{\nu}_2$ соответствуют поперечные колебания, совершающиеся во взаимно перпендикулярных плоскостях; частоте $\tilde{\nu}_3$ — продольные колебания, в которых атомы кислорода колеблются синфазно; частоте $\tilde{\nu}_4$ — также продольные колебания, но в них атомы кислорода колеблются в противоположных фазах (рис. 26).

Примечание. Под $\tilde{\nu}$ здесь понимается так называемая спектроскопическая частота, т. е. $\tilde{\nu}=1/\lambda$, где λ — длина волны. Величина $\tilde{\nu}$ связана с обычной частотой ν соотношением $\nu=c\tilde{\nu}$, где c — скорость света.

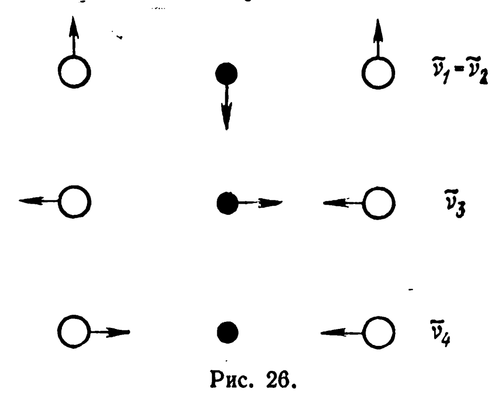


Рис. 26.

377. Используя решения задач 369—376 и результаты измерения теплоемкости H_2, O_2 и CO_2 при нормальных условиях, построить приблизительный график зависимости от температуры молярной теплоемкости C_V для этих газов.

378. Согласно теории теплоемкостей Дебая свободная энергия твердого тела при низких температурах выражается формулой

$$\Psi = U_0 - AT^4,$$

где U_0— внутренняя энергия тела при абсолютном нуле (нулевая энергия), а A — положительный коэффициент, зависящий только от объема V. Пользуясь этой формулой, показать, что при низких температурах отношение коэффициента объемного расширения тела α к теплоемкости C_V не зависит от температуры (закон Грюнейзена).

379. Зеркальце висит на кварцевой нити, модуль кручения которой равен D, и освещается таким образом, что его повороты, вызванные ударами окружающих молекул газа, можно регистрировать на шкале. Положению покоя соответствует угол поворота $\varphi=0$. Как изменяется средний квадрат угловой скорости $\overline{\dot{\varphi}^2}$ и средний квадрат углового отклонения $\overline{\varphi^2}$, если момент инерции зеркальца, длину нити и ее диаметр увеличить соответственно в α, β, γ раз? Какое значение получится для числа Авогадро N из изме-

рений при температуре $T=287$ К, если $D=9{,}43\cdot 10^{-9}$ дин·см, $\overline{\varphi^2}=4{,}18\cdot 10^{-6}$? (Данные взяты из опытов Герлаха и Капплера.)

380. Рассматривая зеркальце, подвешенное на кварцевой нити (см. предыдущую задачу), как гармонический осциллятор с незатухающими колебаниями, найти $\overline{\varphi^2}$ и $\overline{\dot\varphi^2}$ в квантовом случае. Написать условие применимости классических выражений. Найти квантовые поправки, используя данные предыдущей задачи. Для момента инерции зеркальца взять $I\approx 0{,}01$ г·см^2.

381. Пусть f и g — произвольные физические величины, флуктуирующие вокруг своих средних значений $\bar f$ и $\bar g$, так что $f=\bar f+\Delta f$, $g=\bar g+\Delta g$. Найти среднее значение произведения fg.

382. Выразить средний квадрат флуктуации $\overline{\Delta f^2}=\overline{(f-\bar f)^2}$ произвольной физической величины f через $\overline{f^2}$ и $\bar f^2$.

383. Величины f и g называются статистически независимыми, если $\overline{\Delta f\Delta g}=0$. Показать, что для статистически независимых величин $\overline{fg}=\bar f\bar g$.

384. Пусть F — какая-либо аддитивная физическая величина, характеризующая систему N молекул идеального газа, так что $F=\sum f_i$, где величины f_i характеризуют i-ю молекулу того же газа. Выразить средний квадрат флуктуации величины F через средний квадрат флуктуации величины f, а также найти относительную флуктуацию той же величины.

385. В закрытом сосуде объема V в отсутствие силовых полей находятся N молекул идеального газа. Определить среднее число молекул и его флуктуации в объеме v, являющемся малой частью объема V.

386. Газообразный водород при температуре $T=300$ К и давлении $P=10^{-6}$ атм вытекает в вакуум из тонкостенного сосуда через отверстие с площадью $S=0{,}1$ мм^2. Через определенные промежутки времени на опыте измеряется полный поток атомов через отверстие за интервал времени $t=10^{-3}$ с. Предполагая, что давление водорода в сосуде остается постоянным, найти относительную флуктуацию этого потока.

387. В кубическом сосуде емкостью $V=1$ л при комнатной температуре находится N молекул водорода. Найти вероятность P того, что эти молекулы соберутся в одной половине сосуда. Оценить величину N, при которой такое

событие можно ожидать один раз на протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной ($T \sim 10^{10}$ лет).

388. Определить величину объема V в идеальном газе, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет $\alpha = 10^{-6}$ от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц в таком объеме $\bar{n}$. Газ находится при стандартных условиях.

389. Сосуд с N молекулами идеального газа разделен перегородкой на две части с объемами V_1 и V_2. Найти вероятность того, что в первой части будет содержаться N_1, а во второй N_2 молекул.

390. Убедиться, что выражение (389.1) удовлетворяет условию нормировки $\sum P_{N_1 N_2} = 1$, где суммирование производится по всем числам N_1 и N_2, удовлетворяющим условию $N_1 + N_2 = N$. (Для определенности вероятность P мы снабдили индексами N_1 и N_2, смысл которых не нуждается в пояснении.)

391. Два одинаковых сосуда, в которых находится по молю одного и того же идеального газа при одинаковых условиях, сообщаются между собой через отверстие. Какое число молекул n должно перейти из одного сосуда в другой, чтобы возникшее состояние стало в $\alpha = e$ раз менее вероятным, чем исходное?

392. Решить предыдущую задачу, используя формулу Больцмана $S = k \ln P$ и термодинамическое выражение для энтропии идеального газа. Сравнить результат с предыдущим решением и объяснить расхождение.

393. Получить результаты (385.1) и (385.2) с помощью формулы (389.1).

394. Определить асимптотическое выражение, в которое переходит формула (393.1), когда $N \to \infty$ при фиксированных n и $\bar{n}$. Такое выражение определяет вероятность того, что число молекул в объеме v равно n при условии, что объем v окружен однородным газом, простирающимся бесконечно во всех направлениях.

395. Преобразовать выражение (394.1) с помощью асимптотической формулы Стирлинга

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N. \qquad (395.1)$$

396. Если $\bar{n}$ велико, то вероятность (395.2) имеет очень резкий максимум при $n \approx \bar{n}$. Этим можно воспользоваться для упрощения формулы (395.2), разлагая $\ln P_n$ в ряд Тей-

лора по степеням $(n-\overline{n})$ и обрывая это разложение на члене второй степени. Получить выражение для вероятности P_n в этом приближении.

397. Получить распределение Гаусса (396.1) из формулы Больцмана $S=k \ln P$, используя термодинамическое выражение для энтропии идеального газа.

398. Тепловые флуктуации малого объема, заполненного жидкостью или газом и окруженного средой, температура T которой поддерживается постоянной, можно рассчитать следующим образом. Предположим, что рассматриваемая часть жидкости или газа заключена в цилиндр, стенки которого идеально проводят тепло. Одна из стенок — поршень— может свободно без трения перемещаться в цилиндре. К движению поршня можно применить теорему о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы и таким образом найти искомую флуктуацию. Провести этот расчет.

399. Найти среднюю квадратичную относительную флуктуацию объема капельки ртути радиуса $r=0{,}01$ мм в воздухе при температуре $T=300$ К. Изотермическая сжимаемость ртути $\gamma_T=3{,}9\cdot 10^{-6}$ атм$^{-1}$.

400. Найти выражение для флуктуации плотности жидкости или газа, возникающей из-за теплового движения в малом объеме V, мысленно выделенном в рассматриваемой среде.

401. Вычислить флуктуацию кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа.

402. Малая макроскопическая часть системы (подсистема) является частью большой замкнутой системы. Флуктуации энергии и энтальпии такой подсистемы в принципе можно вычислить так же, как это было сделано для молекулы идеального газа (см. предыдущую задачу). Только вместо максвелловского распределения надо пользоваться его обобщением на макроскопические подсистемы (так называемым распределением Гиббса). Таким путем можно показать, что флуктуации внутренней энергии и энтальпии подсистемы определяются выражениями

$$(\overline{\Delta U^2})_V = kT^2 C_V, \tag{402.1}$$

$$(\overline{\Delta I^2})_P = kT^2 C_P, \tag{402.2}$$

где C_V и C_P — теплоемкости подсистемы, а индексы V и P, как всегда, означают, что в первой формуле остается постоянным объем подсистемы V, а во второй — давление P.

Пользуясь этими выражениями, найти для подсистемы $\overline{(\Delta T^2)}_V$, $\overline{(\Delta S^2)}_V$, $\overline{(\Delta S^2)}_P$, $\overline{(\Delta P^2)}_T$ и $\overline{(\Delta P^2)}_S$.

403. Для упрощения вычислений средней длины свободного пробега λ молекулы газа можно предположить, что все молекулы находятся в покое, за исключением рассматриваемой молекулы, скорость которой принимается равной средней скорости теплового движения $\bar{v}$. Пользуясь этим упрощением, вычислить λ, а также среднее число столкновений z, испытываемое молекулой в единицу времени. Молекулы считать твердыми шариками диаметра d.

404. Клаузиус усовершенствовал модель предыдущей задачи, считая при вычислении z и λ, что все молекулы газа имеют одинаковые по абсолютной величине скорости, равные $\bar{v}$ и распределенные в пространстве изотропно. Вычислить z и λ в этом предположении.

405. Используя формулы (403.1) и понятие приведенной массы, получить точные выражения для z и λ с учетом максвелловского распределения скоростей.

406. Для водорода при атмосферном давлении длина свободного пробега $\lambda=1{,}28\cdot10^{-5}$ см. Найти газокинетический диаметр молекулы водорода d.

407. Сколько столкновений z за 1 с испытывает молекула неона при температуре 600 К и давлении 1 мм рт. ст., если газокинетический диаметр молекулы неона равен $d=2{,}04\cdot10^{-8}$ см?

408. Сколько столкновений z испытывает в среднем молекула CO_2 за одну секунду при нормальном давлении и температуре? Газокинетический диаметр молекулы CO_2 $d=10^{-7}$ см.

409. Сколько столкновений ν происходит ежесекундно в 1 см^3 между молекулами кислорода, находящегося при нормальных условиях? Газокинетический диаметр молекулы кислорода $d=3{,}1\cdot10^{-8}$ см.

410. Идеальный газ нагревают при постоянном давлении. Как изменяются длина свободного пробега λ и число z столкновений его молекул в одну секунду с изменением температуры?

411. Идеальный газ сжимают изотермически. Найти зависимость λ и z от давления.

412. Идеальный газ сжимают адиабатически. Найти зависимость λ и z от давления.

413. Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений

между молекулами газа в единице объема в единицу времени остается неизменным.

414. Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений между молекулами во всем объеме газа в единицу времени остается неизменным.

415. Вязкость азота при температуре 0 °C $\eta = 16{,}8 \cdot 10^{-5}$ дин·с/см². Найти значение средней длины свободного пробега λ молекул азота при этих условиях.

416. Вязкость аргона (относительная атомная масса $A = 40$) при 0 °C $\eta = 21 \cdot 10^{-5}$ дин·с/см². Вычислить следующие величины для аргона при нормальной температуре и давлении: 1) среднюю скорость теплового движения атомов, 2) среднюю длину свободного пробега атома, 3) среднее число ν столкновений атомов в 1 см³ в 1 с, 4) газокинетическое эффективное сечение атома σ, 5) газокинетический радиус атома аргона r.

417. Найти среднюю длину свободного пробега λ молекулы кислорода при нормальном давлении, если коэффициент диффузии кислорода при том же давлении и температуре 0 °C равен $D = 0{,}19$ см²/с.

418. Определить расход массы газа Q при стационарном изотермическом пуазейлевом течении его вдоль цилиндрической трубы длины l и радиуса r, на концах которой поддерживаются давления P_1 и P_2 ($P_1 > P_2$).

419. Для определения вязкости η углекислого газа им наполнили колбу с объемом $V = 1$ л при давлении $P_1 = 1600$ мм рт. ст. Затем открыли кран, позволяющий CO_2 вытекать из сосуда через капилляр длиною $l = 10$ см и диаметром $D = 0{,}1$ мм. Через время $\tau = 22$ мин давление в колбе понизилось до $P_3 = 1350$ мм рт. ст. Вычислить из этих данных вязкость и газокинетический диаметр d молекулы CO_2. Наружное атмосферное давление $P_2 = 735$ мм рт. ст. Процесс можно считать изотермическим, происходящим при 15 °C.

420. Для измерения теплопроводности азота им наполнили пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых $r_1 = 0{,}5$ см и $r_2 = 2$ см. Внутренний цилиндр равномерно нагревался спиралью, по которой проходил ток силой $i = 0{,}1$ А. Сопротивление спирали, приходящейся на единицу длины цилиндра, равно $R = 0{,}1$ Ом. Внешний цилиндр поддерживался при температуре $t_2 = 0$ °C. При установившемся процессе оказалось, что температура внутреннего цилиндра равна $t_1 = 93$ °C. Найти газокинетический диаметр d молекулы азота. Давление газа

в таких опытах берется малым (порядка десятков миллиметров), и поэтому конвекцией можно пренебречь.

421. Считая, что газокинетическое поперечное сечение не зависит от температуры, определить зависимость теплопроводности газа от температуры. Пользуясь полученной зависимостью, найти стационарное распределение температуры в плоскопараллельном слое газа толщины l, на границах которого поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2. Нагревание производится таким образом, что конвекция не возникает. Найти также стационарное распределение температуры для сферического и цилиндрического слоев. (Ср. с задачами 263 и 264.)

422. Найти верхний предел давления P водорода в сосуде объемом $V=1$ л, при котором длина свободного пробега молекулы больше размеров сосуда. Газокинетический диаметр водорода $d=2{,}2\cdot 10^{-8}$ см, а температура его $T=300$ K.

423. Теплопроводность газа, как известно, не зависит от давления. Объяснить, зачем из пространства между двойными стенками сосуда Дьюара выкачивают воздух, создавая в этом пространстве возможно более высокий вакуум?

424. Оценить массу M жидкого воздуха, испарившегося за время $\tau = 1$ час из плохо откачанного сосуда Дьюара, если давление воздуха (при комнатной температуре $T_0=293$ K), оставшегося между стенками, равно $P=10^{-3}$ мм рт. ст. Поверхность сосуда $S=600$ см^2, удельная теплота испарения жидкого воздуха $q=48{,}4$ кал/г, а его температура $T=93$ K. Зазор между стенками сосуда мал по сравнению с длиной свободного пробега.

Указание. Для упрощения считать, что молекулы воздуха, попеременно ударяясь о холодную и теплую стенки, каждый раз отражаются от них со средними кинетическими энергиями поступательного движения, соответствующими температурам стенок. Различием между средней и средней квадратичной скоростями молекул пренебречь, рассчитывая скорость молекул по формуле для средней квадратичной скорости.

425. Течение ультраразреженного газа через трубу можно рассматривать как процесс диффузии. Коэффициент диффузии определяется исключительно столкновениями молекул газа со стенками трубы. Столкновениями молекул между собой можно полностью пренебречь. Роль длины свободного пробега играет диаметр трубы $2r$. Исходя из этих представлений, оценить число молекул N, ежесекундно проходящих через поперечное сечение цилиндрической трубы дли-

ны l, если на одном конце трубы концентрация молекул газа равна n_1, а на другом — нулю. Течение считать изотермическим.

426. Решить ту же задачу в предположении, что на одном конце трубы концентрация молекул равна n_1, а на другом — n_2. Результат сравнить с формулой (418.1).

427. Два сосуда одинакового объема соединены трубками. Диаметр одной из трубок очень велик, а другой очень мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, находящегося в сосуде. Первый сосуд поддерживается при постоянной температуре $T_1=800$ K, а второй — при постоянной температуре $T_2=200$ K. В каком направлении будет перетекать газ по узкой трубке, если перекрыть краном широкую трубку? Какая масса m газа перейдет при этом из одного сосуда в другой, если общая масса газа в обоих сосудах равна M?

428. Стеклянный сосуд с толщиной стенок $l=5$ мм и объемом $V=1$ л наполнен азотом и окружен вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиуса $a=0{,}1$ мм. Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время τ, по истечении которого давление газа в сосуде уменьшится в e раз, если температура поддерживается постоянной и равна $T=300$ K.

429. Полностью эвакуированный стеклянный сосуд с толщиной стенок $l=3$ мм и объемом $V=1$ л погружен в атмосферу углекислого газа (CO_2). В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал диаметра $D=0{,}1$ мм. Давление окружающего газа настолько мало, что диаметр канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время τ, по истечении которого давление газа в сосуде будет составлять $(e-1)/e=0{,}628$ от давления окружающего газа при условии, что температура поддерживается постоянной и равна $T=300$ K.

430. Сосуды с объемами V_1 и V_2 соединены между собой цилиндрическим капилляром радиуса a и длины l, по которому происходит изотермическое кнудсеновское перетекание газа из одного сосуда в другой. Как будут меняться во времени концентрации молекул газа в сосудах n_1 и n_2, если их начальные значения были равны n_{10} и n_{20}?

431. Изотермическая эффузия газа через пористую перегородку (поры которой малы по сравнению с длиной свободного пробега) используется для разделения изотопов. Естественная смесь изотопов помещается в сосуд с пористыми стенками. Газ, прошедший через поры сосуда в результате эффузии, откачивается и собирается в специальном резервуаре. С ним производится второй цикл эффузии, затем третий и т. д., пока не будет достигнута требуемая степень разделения изотопов. Сколько циклов эффузии необходимо произвести, чтобы отношение концентраций частиц легкого и тяжелого изотопов увеличить в 10 раз, если относительные молекулярные массы их равны соответственно μ_1 и μ_2?

432. Оценить по порядку величины установившуюся скорость, с которой будет двигаться в сильно разреженном воздухе плоский диск, одна из сторон которого нагрета до температуры $T_1=310$ К, а другая до температуры $T_2=300$ К. Температура воздуха $T=300$ К.

433. Определить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии $h=1$ см вращается второй такой же диск с угловой скоростью $\omega=50$ рад/с. Радиус дисков $R=10$ см, модуль кручения нити $f=100$ дин·см/рад, вязкость воздуха считать равной $\eta=1{,}8\cdot10^{-4}$ дин·с/см². Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

434. Решить предыдущую задачу в предположении, что диски помещены в сильно разреженный воздух с давлением $P=10^{-4}$ мм рт. ст., когда длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с расстоянием между дисками. Для упрощения расчета считать, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, равными средней скорости молекул воздуха $v=450$ м/с.

435. В жидкости находятся одинаковые броуновские частицы, концентрация которых зависит только от одной координаты x. Выравнивание концентрации частиц происходит вследствие диффузии. Выразить коэффициент диффузии броуновских частиц D через средний квадрат смещения частицы в направлении оси X за время τ.

436. Подвижностью B броуновской (или какой-либо другой) частицы называется коэффициент пропорциональности между скоростью u установившегося движения ее под действием постоянной силы f и величиной самой силы:

$$u=Bf.$$

Взвесь одинаковых броуновских частиц в жидкости находится в поле силы тяжести. Написать выражение для суммарного потока частиц вследствие диффузии и действия силы тяжести. В стационарном состоянии суммарный поток должен равняться нулю. В то же время стационарное распределение броуновских частиц по высоте дается формулой Больцмана (барометрической формулой). Исходя из этих соображений, установить связь между подвижностью частицы и коэффициентом диффузии.

437. Используя результаты решения двух предыдущих задач, найти связь между средним квадратом смещения броуновской частицы за время τ в каком-либо определенном направлении $\overline{\Delta x^2}$ с подвижностью этой частицы. Какой вид принимает эта связь для шарообразной частицы радиуса a? (По формуле Стокса $B = \frac{1}{6\pi\eta a}$), где η — вязкость жидкости.)

438. Определить среднее квадратичное горизонтальное перемещение зерен гуммигута в воде при температуре 20 °С за 1 мин, если известно, что радиус их $a=0{,}5$ мкм, а вязкость воды $\eta=0{,}01$ дин·с/см².

439. Согласно Эйнштейну и Смолуховскому, число Авогадро N можно определить, наблюдая броуновское движение зерен гуммигута и измеряя среднее квадратичное перемещение их в некотором фиксированном направлении. Чему равно это число, если среднее квадратичное перемещение за 5 мин зерен гуммигута радиуса $a=0{,}385$ мкм в глицерине при температуре 20 °С равно 1,5 мкм? Вязкость глицерина $\eta=1{,}49$ дин·с/см².

440. При обработке экспериментальных данных, относящихся к броуновскому движению, удобнее и проще вычислять не $\overline{\Delta x^2}$, а $\overline{|\Delta x|}$. Предполагая, что распределение смещений Δx подчиняется закону ошибок Гаусса, найти выражение для среднего смещения броуновской частицы $\overline{|\Delta x|}$ за время τ.

441. Капелька масла массы $m=10^{-10}$ г падает в воздухе с высоты $h=1$ м, совершая при этом броуновское движение. Предполагая, что к ее падению применима формула Стокса, найти средний квадрат $\overline{r^2}$ отклонения капельки от ожидаемой точки падения, если температура воздуха $T=300$ К. Проверить, выполняются ли условия применимости формулы Стокса, если плотность масла $\rho=0{,}9$ г/см³, а вязкость воздуха $\eta=1{,}8\cdot10^{-4}$ дин·с/см².

442. При измерении заряда электрона по методу Милликена наблюдается броуновское движение масляных капель. Наблюдая это движение, можно найти не только заряд электрона, но и число Авогадро. Пусть v_1— скорость установившегося падения капли в поле тяжести при отсутствии электрического поля. Пусть в электрическом поле напряженности E капля поднимается вверх с установившейся скоростью v_2. Из этих наблюдений, как известно, можно вычислить заряд капли e. Пусть $\overline{(\Delta x)^2}$— средний квадрат смещения частицы за время τ в направлении (горизонтальной) оси X. Считая, что установившаяся скорость частицы пропорциональна приложенной силе, найти выражение для Ne, где N — число Авогадро.

443. При наблюдении броуновского движения масляной капли в конденсаторе Милликена (см. предыдущую задачу) было найдено $\overline{(\Delta x)^2}=1{,}05\cdot 10^{-5}$ см^2, $\tau=10$ с, $v_1+v_2=0{,}0268$ см/с, $T=300$ К. Напряжение на обкладках конденсатора $V=940$ В, расстояние между пластинами конденсатора $d=0{,}7$ см. Вычислить по этим данным число Авогадро. Измеренный на опыте заряд капли оказался равным заряду электрона $e=4{,}8\cdot 10^{-10}$ СГСЭ.

444. Космические лучи блуждают в Галактике, отклоняясь в межзвездных магнитных полях. Этот процесс подобен диффузии. Найти время τ, за которое частицы пройдут путь порядка размеров Галактики $R\approx 5\cdot 10^{22}$ см, если эффективная длина свободного пробега $l\approx 3\cdot 10^{20}$ см.

445. Звук какой длины волны начинает сильно затухать при распространении в одноатомном газе?

446. Каково по порядку величины эффективное сечение для соударений электронов с ионами плазмы, нагретой до температуры T? Имеются в виду соударения с передачей импульса, сопровождающиеся сильными отклонениями электронов.

447. Используя результат решения предыдущей задачи, получить приближенное выражение для удельной электрической проводимости Λ и удельного электрического сопротивления ρ водородной или дейтериевой плазмы, нагретой до абсолютной температуры T. Как зависит удельная электрическая проводимость плазмы от ее плотности и температуры?

448. При какой температуре T удельная электрическая проводимость водородной или дейтериевой плазмы будет

равна удельной электрической проводимости меди при комнатной температуре? Удельная электрическая проводимость меди $5,14 \cdot 10^{17}$ $с^{-1} = 5,72 \cdot 10^5$ $Ом^{-1} \cdot см^{-1}$.

449. Получить приближенное выражение для теплопроводности водородной или дейтериевой плазмы $\varkappa$, нагретой до абсолютной температуры T. Как зависит теплопроводность плазмы от ее плотности и температуры?

§ 7. Реальные газы

450. Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа записывается в виде

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \qquad (450.1)$$

Записать это уравнение для газа, содержащего ν молей.

451. Найти выражения для давления, температуры и объема газа и установить связь между этими величинами в критической точке, предполагая, что вещество подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

452. Записать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных параметрах

$$\tau = \frac{T}{T_{кр}}, \quad \pi = \frac{P}{P_{кр}}, \quad \varphi = \frac{V}{V_{кр}},$$

т. е. таких параметрах, когда за единицы приняты критическая температура, критическое давление и критический объем моля газа.

453. Если температура газа ниже так называемой температуры Бойля, то при изотермическом сжатии его произведение PV сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Если же температура газа выше температуры Бойля, то при изотермическом сжатии произведение PV монотонно возрастает. Убедиться в этом и выразить температуру Бойля через критическую температуру для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

454. Критическая температура углекислоты (CO_2) равна 31 °C, критическое давление 73 атм. Определить критический объем $V_{кр}$ моля CO_2.

455. Ниже приведены значения постоянных Ван-дер-Ваальса для некоторых газов:

Газ	a, 10^6 атм·см^6/моль^2	b, см^3/моль
Гелий	0,034	23,7
Водород	0,24	26,6
Азот	1,39	39,1
Кислород	1,36	31,8
CO_2	3,60	42,7

Пользуясь этими значениями, вычислить критическое давление, критическую температуру, критический объем, а также температуру Бойля для приведенных газов в предположении, что они подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса.

456. Найти постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса для азота, если $t_{кр}$ азота равна —146 °С, $P_{кр}=33$ атм.

457. Найти критическую плотность воды, если критическое давление для воды равно $P_{кр}=195$ атм, а критическая температура $T_{кр}=374$ °С, предполагая, что вода подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

458. Принимая постоянную a Ван-дер-Ваальса для воды равной $5{,}47\cdot 10^6$ атм·см^6/моль^2, найти внутреннее давление воды P.

459. Было предложено много эмпирических и полуэмпирических уравнений состояния реальных газов. Ниже приводятся простейшие из них.

Уравнение Бертло:

$$\left(P+\frac{a}{TV^2}\right)(V-b)=RT.$$

Уравнение Клаузиуса:

$$\left(P+\frac{a}{T(V+c)^2}\right)(V-b)=RT.$$

Первое уравнение Дитеричи:

$$P(V-b)=RT\exp\left\{-\frac{a}{RTV}\right\}.$$

Второе уравнение Дитеричи:

$$\left(P+\frac{a}{V^{5/3}}\right)(V-b)=RT,$$

где a, b, c — постоянные. Найти для этих уравнений критические параметры $P_{кр}$, $T_{кр}$, $V_{кр}$, значение критического коэффициента $RT_{кр}/(P_{кр}V_{кр})$ и температуры Бойля $T_В$.

460. Найти выражение для изотермической сжимаемости γ_T газа Ван-дер-Ваальса.

461. Найти температурный коэффициент расширения α для газа Ван-дер-Ваальса при постоянном давлении.

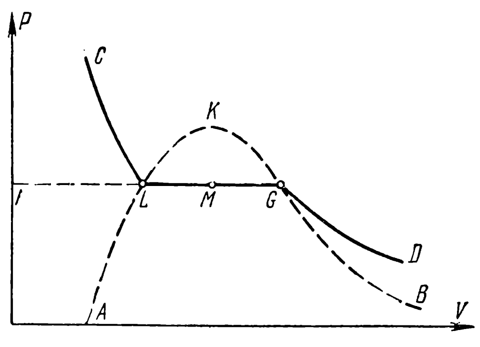


Рис. 27.

462. На рис. 27 кривая $CLMGD$ представляет одну из реальных изотерм вещества, а пунктирная кривая $ALKGB$ отделяет область однофазного состояния вещества от области двухфазного. Показать, что в состоянии, изображаемом точкой M, массы жидкой и газообразной фаз относятся как $m_ж/m_г=MG/LM$ (правило рычага).

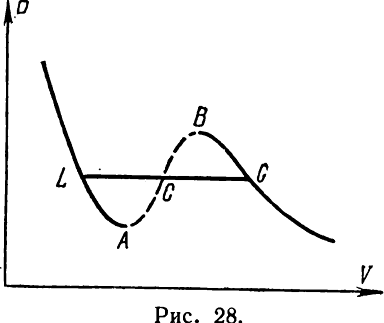


Рис. 28.

463. На рис. 28 представлены две изотермы, переводящие вещество из жидкого состояния L в газообразное G: реальная изотерма, изображаемая горизонтальным отрезком LCG, и теоретическая изотерма $LACBG$, содержащая поднимающийся участок ACB, которому соответствует абсолютно неустойчивое состояние вещества. Рассмотрим цикл $LACL$ и применим к нему равенство Клаузиуса. Так как вдоль цикла $T=\text{const}$, то равенство Клаузиуса примет вид $\oint \delta Q = 0$, или $\oint dU + \oint P\,dV = 0$. Поскольку U — функ-

ция состояния, $\oint dU = 0$ и, следовательно, $\oint P\,dV = 0$. А так как изотермы LAC и CL в рассматриваемом цикле не пересекаются, то они должны совпадать между собой. В чем ошибочность приведенного рассуждения?

464. Чему равна теплоемкость C_P вещества в двухфазном состоянии, изображаемом точкой под кривой $ALKGB$ (рис. 27)?

465. Найти распределение плотности в поле силы тяжести физически однородного вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, в окрестности критической точки.

466. Как впервые указал А. Г. Столетов (1892 г.), для приведения жидкости, заключенной в данный объем, в критическое состояние должно быть взято вполне определенное количество ее. Рассмотреть следующий пример. Сосуд, объем которого $V_1 = 15$ см^3, должен быть наполнен водой при температуре $t_1 = 18$ °C, с таким расчетом, чтобы при нагревании ее в данном сосуде (предварительно откачанном и запаянном) до критической температуры в нем установилось критическое давление. В предположении, что вода подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса, найти, какой объем воды должен быть налит в сосуд, если известно, что критическая температура воды $t_{кр} = 374$ °C, критическое давление $P_{кр} = 205{,}5$ атм, относительная молекулярная масса $\mu = 18$, плотность при 18 °C равна $\rho = 1$ г/см.

467. Почему в известных демонстрационных опытах с нагреванием жидкостей в запаянных ампулах для приведения этих жидкостей в критическое состояние не требуется заполнять ампулу строго определенным количеством жидкости (см. предыдущую задачу)? Мениск между жидкой и парообразной фазами при нагревании исчезает, а при охлаждении появляется вновь в пределах ампулы, даже если это условие не выполнено.

468. Рассматривая удельную теплоту испарения q как работу, затрачиваемую на преодоление внутреннего давления P_i, найти зависимость между P_i, q и плотностью жидкости ρ. Считать, что жидкость подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

469. Доказать, что теплоемкость C_V газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, не зависит от объема, а является функцией только температуры. Найти выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса, теплоемкость которого не зависит от температуры. (См. задачи 175, 179.)

470. Вычислить внутреннюю энергию газа Ван-дер-Ваальса как теплоту, сообщенную газу при нагревании при постоянном объеме, за вычетом работы, произведенной газом при изотермическом расширении. При этом надо учесть, что при изотермическом расширении газ, кроме внешней работы, производит работу против внутреннего давления. В чем недостаток этого способа по сравнению с термодинамическим способом предыдущей задачи?

471. Моль азота расширяется в пустоту от начального объема 1 л до конечного 10 л. Найти понижение температуры ΔT при таком процессе, если постоянная a в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота равна $1{,}35 \cdot 10^6$ атм·см^6/моль^2.

472. Два сосуда с объемами V_1 и V_2 соединены трубкой с краном. В каждом из них при закрытом кране находится по одному молю одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. До открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова и равна T. Нагреется или охладится газ, если открыть кран? На сколько при этом изменится температура газа? Определить давление газа после открытия крана. Стенки сосуда и соединяющей их трубки считать адиабатическими, а теплоемкость C_V— не зависящей от температуры.

473. Два баллона с объемами $V_1=V_2=V=1$ л соединены трубкой с краном. В объеме V_1 находится воздух под атмосферным давлением, а объем V_2 откачан до предельного вакуума. Считая, что воздух подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, а стенки баллонов и трубки адиабатические, определить, на сколько изменится температура газа после открытия крана. Начальная температура $T=290$ К, для воздуха $a=1{,}39 \cdot 10^6$ атм·см^6/моль^2.

474. Азот при критической температуре $T_{кр}=147\,°C$ имеет критический объем $V_{кр}=0{,}12$ л/моль. Считая, что азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти понижение температуры 7 г азота при расширении в пустоту от объема $v_1=5$ л до объема $v_2=50$ л.

475. Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 его температура не изменилась?

476. Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 его давление осталось постоянным и равным P?

477. Найти выражение для удельной теплоты испарения моля жидкости при постоянной температуре T под

давлением ее насыщенного пара в предположении, что уравнением состояния жидкости и ее пара является уравнение Ван-дер-Ваальса. Считать известными температуру T и молярные объемы жидкости $V_ж$ и ее насыщенного пара $V_п$ при этой температуре.

478. Найти $C_P - C_V$ для моля газа Ван-дер-Ваальса.

479. Найти выражение для энтропии ν молей газа Ван-дер-Ваальса.

480. Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, считая, что его теплоемкость C не зависит от температуры.

481. Показать, что в критической точке для любого вещества разность $C_P - C_V$, а также теплоемкость C_P обращаются в бесконечность.

482. Показать непосредственным детальным расчетом, что к. п. д. цикла Карно не зависит от параметров газа Ван-дер-Ваальса, используемого в качестве рабочего тела в этом цикле. Внутренняя энергия моля газа Ван-дер-Ваальса дается выражением

$$U = f(T) - \frac{a}{V},$$

где функция $f(T)$ зависит только от температуры. (В предлагаемом расчете эту формулу бессмысленно рассматривать как термодинамическую, поскольку термодинамический вывод ее по существу использует теорему Карно о независимости к. п. д. цикла Карно от рода рабочего вещества. Предлагаемый расчет имеет смысл, если выражение для U обосновано как-то иначе, например, эмпирически или молекулярно-кинетически.)

483. Получить формулу для изменения температуры газа в дифференциальном эффекте Джоуля — Томсона, предполагая, что газ подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса. (См. решение задачи 252.)

484. Рассмотреть предельный случай формулы (483.1), предполагая газ настолько разреженным, что квадратами и высшими степенями поправок a и b можно пренебречь. Показать, что при температурах выше так называемой температуры инверсии $T_{инв}$ дифференциального эффекта Джоуля — Томсона газ при дросселировании будет нагреваться, а при температурах ниже температуры инверсии — охлаждаться. Получить выражение для $T_{инв}$ и установить связь этой температуры с критической температурой $T_{кр}$.

485. Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с $a=0$ в опыте Джоуля — Томсона всегда нагревается. Определить повышение температуры при расширении.

486. Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с $b=0$ в опыте Джоуля — Томсона всегда охлаждается. Определить понижение температуры при расширении.

487. При какой температуре T гелий в опыте Джоуля — Томсона начнет охлаждаться, если известно, что критическая температура гелия $T_{кр}=5{,}1$ K? Считать, что состояние гелия описывается уравнением Ван-дер-Ваальса.

488. Найти температуры инверсии $T_{инв}$ дифференциального эффекта Джоуля — Томсона для разреженных водорода, воздуха и углекислоты в предположении, что эти газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса. Определить также изменение температуры ΔT в опыте Джоуля — Томсона с этими газами, если $T=300$ K, а давление понижается на $|\Delta P|=0{,}1$ атм. Постоянные Ван-дер-Ваальса указанных газов приведены в условии задачи 455 (для воздуха a и b взять такими же, как для азота).

489. Предполагая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти уравнение кривой инверсии, т. е. такой кривой в плоскости V, T, при переходе через которую эффект Джоуля — Томсона меняет знак.

490. То же для газа, подчиняющегося уравнению состояния Дитеричи.

491. Газы в задаче 488 в начальном состоянии были сильно сжаты до молярных объемов $V=100$ см^3, а затем в процессе Джоуля — Томсона расширились до атмосферного давления. Предполагая, что газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса, найти изменение температуры $\Delta T=T'-T$ в таком процессе.

Примечание. При столь сильном сжатии нельзя пользоваться формулой для дифференциального эффекта Джоуля — Томсона. При атмосферном давлении газы могут считаться идеальными.

492. Расширение газа в процессе Джоуля — Томсона производится от начального состояния T, V до сильно разреженного состояния, в котором газ может считаться идеальным. Если начальное состояние газа изображать на диаграмме T, V, то на ней можно начертить кривую, которая делит плоскость T, V на две области: точкам одной области соответствует $\Delta T<0$ (газ охлаждается), а другой

$\Delta T > 0$ (газ нагревается). Эта кривая называется кривой инверсии интегрального эффекта Джоуля — Томсона. Найти ее уравнение и начертить кривые инверсии для азота, водорода и гелия в предположении, что эти газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса.

493. Теплоизолированный сосуд наполнен газообразным гелием при температуре $T_0 = 10$ K (выше критической точки). Газ медленно вытекает через капиллярную трубку до тех пор, пока давление в сосуде не станет равным $P_1 = 1$ атм, а температура $T_1 = 4{,}2$ K (точка кипения гелия при нормальном давлении). Найти начальное давление газа в сосуде P, если в конце процесса сосуд оказался полностью заполненным жидким гелием. Молярная теплота испарения гелия при 4,2 K равна $q = 20$ кал/моль. Газообразный гелий считать идеальным газом.

§ 8. Поверхностное натяжение

494. Для определения поверхностного натяжения воды взвешивают капли, отрывающиеся от капилляра, и измеряют диаметр d шейки капли в момент отрыва. Оказалось, что масса 318 капель воды равна 5 г, а $d = 0{,}7$ мм. Найти поверхностное натяжение воды.

495. Вертикальная капиллярная стеклянная трубка подвешена к коромыслу весов и уравновешена гирями. Что произойдет с весами, если под капиллярную трубку осторожно поднести сосуд с водой так, чтобы кончик капилляра коснулся ее поверхности?

496. Как велико поверхностное натяжение σ жидкости, если петля из резинового шнура длиной l с поперечным сечением S, положенная на пленку этой жидкости, растянулась в окружность радиуса R после того, как пленка была проколота внутри петли? Считать, что при малых растяжениях для резины справедлив закон Гука и модуль Юнга резины равен E.

497. Капля несжимаемой жидкости совершает пульсационные колебания, становясь последовательно вытянутой, сферической, сплюснутой, сферической, снова вытянутой и т. д. Как зависит период этих пульсаций T от плотности ρ, поверхностного натяжения σ и радиуса капли r?

498. Струя жидкости вытекает через горизонтальную трубку в боковой стенке сосуда (рис. 29). Поперечное сечение трубки имеет форму эллипса, вытянутого в горизон-

тальном направлении. Струя принимает форму цепи, звенья которой попеременно то вытянуты, то сплюснуты в горизонтальном направлении. Объяснить явление. Как зависит длина звена l в начальной части струи от плотности жидкости ρ, поверхностного натяжения σ, расстояния h от основания трубки до уровня жидкости и ускорения свободного падения g, если сечение трубки остается неизменным? Рэлей использовал описанное явление для сравнения поверхностных натяжений различных жидкостей.

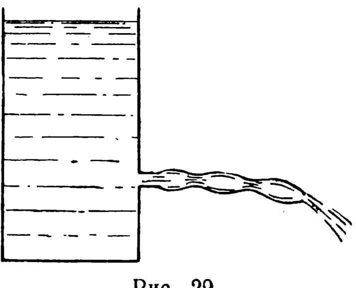


Рис. 29.

499. Рассмотрев цикл Карно для пленки жидкости в предположении, что температуры нагревателя и холодильника бесконечно мало отличаются друг от друга, и применив к этому циклу теорему Карно, найти производную поверхностного натяжения σ жидкости по температуре T.

500. Найти выражение для внутренней энергии U пленки.

501. Определить изменение температуры пленки при адиабатическом расширении.

502. Мыльная пленка имеет толщину $h=10^{-3}$ мм и температуру $T=300$ K. Вычислить понижение температуры этой пленки, если ее растянуть адиабатически настолько, чтобы площадь пленки удвоилась. Поверхностное натяжение мыльного раствора убывает на 0,15 дин/см при повышении температуры на 1 K.

503. В сосуде с адиабатическими стенками находится мыльный пузырь радиуса $r=5$ см. Общее количество воздуха в сосуде и в пузыре $\nu=0,1$ моля, его температура $T=290$ K (предполагается, что она одинакова внутри и вне пузыря). При этой температуре поверхностное натяжение $\sigma=70$ дин/см, $d\sigma/dT=-0,15$ дин/(см·K). Как изменится температура воздуха в сосуде, если пузырь лопнет? Теплоемкостью образовавшихся капелек пренебречь.

504. Показать, что вблизи абсолютного нуля поверхностное натяжение жидкости перестает зависеть от температуры, т. е.

$$\lim_{T \to 0} \frac{d\sigma}{dT} = 0.$$

(Конкретно речь может идти только о гелии — единственном веществе, остающемся жидким при абсолютном нуле температуры.)

505. Чему равно капиллярное давление P в капельке ртути с диаметром $d=1$ мкм при температуре 15 °С, если поверхностное натяжение ртути при этой температуре $\sigma=$ $=487$ дин/см?

506. Чему равно добавочное давление P внутри мыльного пузыря с диаметром $d=0{,}8$ см, если поверхностное натяжение мыльной воды $\sigma=40$ дин/см?

507. В дне сосуда имеется трещина шириной $a=0{,}02$ мм. До какой высоты h можно налить ртуть в сосуд, чтобы она еще не вытекала через трещину? Плотность ртути $\rho=$ $=13{,}6$ г/см³. Поверхностное натяжение (при 15 °С) $\sigma=$ $=487$ дин/см.

508. Оценить максимальное количество воды, которое можно налить в решето с парафинированным дном диаметра $D=20$ см, если последнее сделано из металлического листа с круглыми отверстиями диаметра $d=1$ мм. Поверхностное натяжение воды $\sigma=70$ дин/см. Как зависит максимальное количество наливаемой жидкости от ее плотности?

509. Столбик жидкости, помещенный в коническую трубку, сам движется к более узкой части, когда он смачивает стенки трубки, и к более широкой части, когда не смачивает. Объяснить явление.

510. Если в трубке находится ряд капель (столбиков) какой-либо жидкости, то требуется значительное давление, чтобы продвинуть их вдоль трубки, независимо от того, смачивают они стенки трубки или не смачивают. Сопротивление смачивающих капель еще более увеличивается, когда канал трубки попеременно суживается и расширяется. При этом капли собираются в суженных частях канала. Объяснить явление.

511. Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, нужно ускорение $a\sim 10g$. Оценить диаметр перетяжки в капилляре термометра. Поверхностное натяжение ртути $\sigma=490$ дин/см, длина столбика ртути выше перетяжки $h\sim 5$ см, плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см³.

512. На дне пруда глубиной $h=2$ м выделяются пузырьки газа с диаметром $d_1=0{,}05$ мм. Чему будут равны диаметры d_2 этих пузырьков, когда они поднимутся к поверхности воды? Поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ дин/см.

513. На какую величину ΔT температура воздуха внутри мыльного пузыря должна превышать температуру окру-

жающего воздуха T, чтобы пузырь стал подниматься? Радиус пузыря равен r, поверхностное натяжение мыльной пленки σ. Массой пленки можно пренебречь. Учесть, что давление воздуха внутри пузыря мало отличается от атмосферного давления P.

514. В цилиндре с подвижным поршнем заключен мыльный пузырь радиуса r, наполненный воздухом. Вначале давление воздуха вне пузыря равно атмосферному давлению P_0. Медленным вдвиганием поршня мыльный пузырь сжимают, так что радиус его уменьшается вдвое. Определить давление наружного воздуха в цилиндре в этот момент.

515. На сколько изменится по сравнению с C_P молярная теплоемкость идеального газа C, если его нагреть внутри мыльного пузыря радиуса $r=1$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma=50$ дин/см. Зависимостью σ от температуры пренебречь. Давление вне пузыря $P_0=1$ атм.

516. Мыльный пузырь выдут через цилиндрическую трубку с внутренним радиусом $r=1$ мм и длиной $l=10$ см. В тот момент, когда радиус пузыря достигает значения $R_0=10$ см, перестают дуть, и воздух из пузыря начинает выходить через трубку. Через какое время, начиная с этого момента, пузырь исчезнет? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma=50$ дин/см, вязкость воздуха $\eta=1{,}8\cdot10^{-4}$ дин·с/см^2. Изменением плотности воздуха за время процесса пренебречь.

517. В стенке шарового мыльного пузыря сделано круглое отверстие с радиусом $a=1$ мм (такое отверстие, например, можно получить, поместив на стенку пузыря петельку из нити, а затем проткнув мыльную пленку внутри этой петельки). Найти время, в течение которого весь воздух выйдет из пузыря, если его начальный радиус $r_0=10$ см. Температура воздуха вне и внутри пузыря $t=20$ °C. Поверхностное натяжение мыльного раствора при этой температуре $\sigma=50$ дин/см. Атмосферное давление $P=760$ мм рт. ст. Среднюю относительную молекулярную массу воздуха принять равной $\mu=29$. При истечении через отверстие воздух рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость.

518. Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны R_1 ее поверхности в нижней точке от радиуса кривизны R_2 в верхней точке, если расстояние между этими точками $d=2$ мм? Поверхностное натяжение $\sigma=70$ дин/см.

519. Внутри мыльного пузыря радиуса r_0 находится воздух (идеальный газ) при температуре T_0 и давлении P_0.

Поверхностное натяжение мыльного раствора при этой температуре равно σ_0. Удельная теплота изотермического образования единицы поверхности мыльной пленки при той же температуре равна q_0. Найти производную dr/dT (радиуса пузыря r по температуре T) для $T=T_0$. Наружное давление остается постоянным.

520. Найти поверхностное натяжение σ жидкости, если в капилляре с диаметром $D=1$ мм она поднимается на высоту $h=32{,}6$ мм. Плотность жидкости $\rho=1$ г/см³. Краевой угол мениска равен нулю.

521. Какова разность уровней жидкости в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами d_1 и d_2? Поверхностное натяжение жидкости равно σ. Краевые углы менисков равны нулю. Плотность жидкости равна ρ.

522. Насколько изменится разность уровней h_1-h_2 воды в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами $d_1=0{,}1$ мм и $d_2=0{,}3$ мм при нагревании от 20 до 70 °С, если поверхностное натяжение воды для этих температур равно соответственно 73 и 64 дин/см?

523. Вертикально расположенный стеклянный капилляр длины l и радиуса r запаян с верхнего конца. На какую высоту h поднимется вода в капилляре, если его нижний конец привести в соприкосновение с поверхностью воды?

524. На какую высоту h поднимается вода между двумя вертикальными стеклянными пластинками, частично погруженными в эту жидкость, если расстояние между ними $d=0{,}5$ мм? Для воды $\sigma=73$ дин/см. Краевой угол θ в этом случае можно считать равным 0°.

525. Две стеклянные вертикальные пластинки, погруженные частично в жидкость, образуют друг с другом очень малый двугранный угол α. Найти высоту поднятия жидкости h как функцию расстояния x от ребра двугранного угла.

526. Капля воды с массой $m=0{,}1$ г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми водой, причем краевой угол $\theta=0°$. Как велика сила притяжения между пластинками F, если они находятся друг от друга на расстоянии $d=10^{-4}$ см? Поверхностное натяжение воды (при 18 °С) $\sigma=73$ дин/см.

527. Грамм ртути помещен между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу F надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть приняла форму круглой лепешки однородной толщины и радиуса $R=5$ см. Поверхностное натяжение ртути (при 15 °С) $\sigma=487$ дин/см, краевой угол между ртутью и стеклом $\theta=40°$.

528. С какой силой F притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погруженные в воду так, что расстояние между ними равно $d=0,1$ мм? Ширина пластинок $l=15$ см, $\sigma=73$ дин/см, $\theta=0°$. Высота пластинок такова, что поднявшаяся вода не доходит до их верхних краев.

529. Две вертикальные параллельные пластинки частично погружены в жидкость. Показать, что между ними будет наблюдаться притяжение, когда обе пластинки либо смачиваются, либо не смачиваются жидкостью, и отталкивание, когда одна пластинка смачивается жидкостью, а другая нет.

530. Бесконечно длинная прямоугольная пластинка кладется на поверхность смачивающей ее жидкости, а затем слегка приподнимается, увлекая за собой некоторое количество жидкости (рис. 30). Найти уравнение боковой поверхности жидкости, устанавливающейся под влиянием капиллярных сил и силы тяжести.

531. Определить в предыдущей задаче максимально возможную высоту поднятия пластинки над уровнем жидкости h и толщину приподнятого столба жидкости D в наиболее

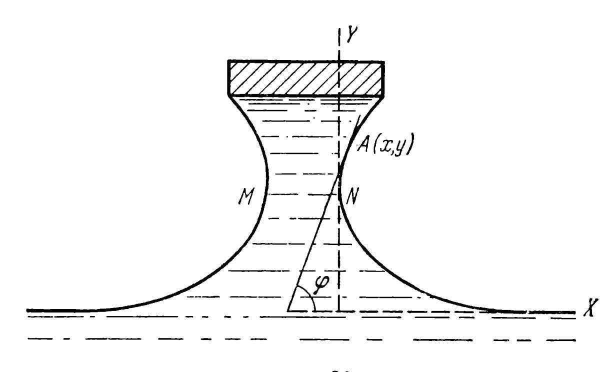


Рис. 30.

узком месте MN (рис. 30) при этой высоте поднятия. Найти также силу F, которую необходимо приложить к единице длины пластинки, чтобы оторвать последнюю от жидкости. Вес единицы длины пластинки равен q, ее ширина a.

532. Бесконечно длинная прямоугольная пластинка ширины a положена на поверхность несмачивающей ее жидкости с поверхностным натяжением σ. Плотность вещества пластинки ρ_0 больше плотности жидкости ρ. Найти

максимальную толщину пластинки h, при которой она еще не утонет.

533. Определить силу F, необходимую для отрыва круглой невесомой пластинки радиуса $r=8$ см, положенной на поверхность воды. Поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ дин/см. Пластинка смачивается водой.

534. Найти высоту поднятия h жидкости у вертикальной бесконечной пластинки, смачиваемой жидкостью. Краевой угол равен θ. (См. решение задачи 530.)

535. Определить глубину h ртутной лужицы на плоском горизонтальном стекле. Поперечные размеры лужицы велики по сравнению с ее глубиной. Поверхностное натяжение ртути на границе с воздухом $\sigma=490$ дин/см, краевой угол на стекле $\theta=140°$. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3.

536. Стальная иголка (лучше, если ее предварительно покрыть тонким слоем парафина) может плавать на поверхности воды (рис. 31). Найти радиус иголки r, ширину зазора

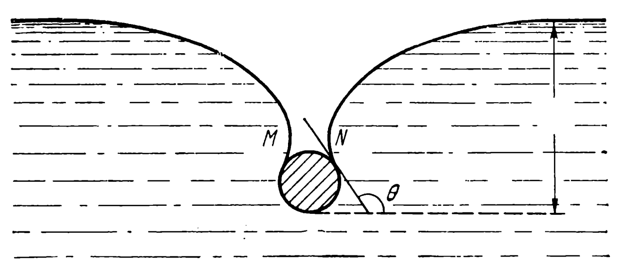


Рис. 31.

$D=MN$ между боковыми поверхностями жидкости в наиболее узком месте, а также глубину погружения H для различных значений угла θ, образуемого общей касательной к поверхности иголки и жидкости с горизонтальной плоскостью. Плотность стали $\rho_0=7{,}8$ г/см^3, поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ дин/см. Определить максимальный радиус иголки, при котором она еще не утонет. Найти максимально возможную глубину погружения и соответствующий ей радиус иголки. При расчете иголку заменить бесконечно длинным цилиндром.

537. Определить форму мыльной пленки, края которой закреплены на двух одинаковых кольцах радиуса R, удаленных друг от друга на расстояние $2h$. Центры колец лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям. Плоскости колец не затянуты пленками.

538. Между двумя круглыми кольцами одинакового радиуса образовалась цилиндрическая мыльная пленка, причем основания колец также затянуты мыльными пленками, имеющими, как легко показать, сферическую форму. Найти соотношение между радиусами цилиндрической и сферической частей пленок.

539. Решить задачу 537 в предположении, что не только боковая поверхность, но и плоскости колец затянуты мыльными пленками.

540. В задаче 538 давление воздуха внутри пузыря слегка изменяется, вследствие чего прямолинейные образующие цилиндрической поверхности искривляются. Показать, что если искривление мало, то образующая примет форму синусоиды, причем ее период будет равен длине окружности $2\pi r$ основания невозмущенной цилиндрической пленки. Пользуясь этим результатом, доказать, что при увеличении давления воздуха внутри пузыря, когда его длина меньше πr, пузырь будет выпучиваться, а при уменьшении давления сужаться. Если же длина пузыря будет больше πr, но меньше $2\pi r$, то увеличение внутреннего давления заставит боковую поверхность пленки сделаться вогнутой, а уменьшение — выпуклой. (Можно воспользоваться результатом решения предыдущей задачи.)

§ 9. Фазовые превращения. Растворы

541. В закрытом сосуде при 0 °C находится один моль (18 г) воды. Какое количество тепла надо затратить, чтобы повысить температуру системы до 100 °C и чтобы при этом вся вода превратилась в насыщенный пар. Удельная теплота испарения воды при 100 °C и постоянном давлении составляет 539 кал/г. Упругостью насыщенного пара при 0 °C и теплоемкостью стенок сосуда пренебречь. Пренебречь также объемом воды по сравнению с объемом ее насыщенного пара.

542. Какую работу совершает за один цикл *1234561* машина Карно, рабочим телом которой является один моль воды, испытывающий во время работы машины фазовые превращения в пар и обратно (рис. 32)? Изотермам *1234* и *56* соответствуют температуры T_1=500 K и T_2=373 K. Нижняя изотерма *56* (T_2=373 K) целиком лежит в двухфазной области вещества, так что в *6* имеется только жидкость, а в *5* —

только пар. Кривые *16* и *45* — адиабаты. Удельная теплота парообразования воды $q=2,25$ кДж/г (при $T=373$ К).

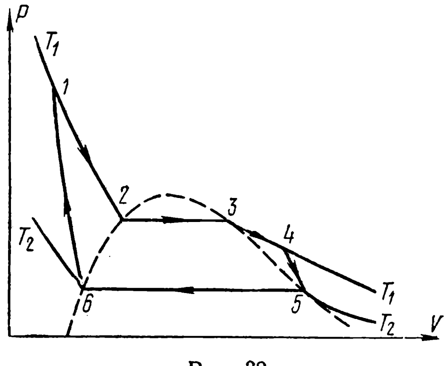


Рис. 32.

543. На дне сосуда, откачиваемого до высокого вакуума, наморожен плоскопараллельный слой льда толщиной $l=7$ мм, нижняя поверхность которого поддерживается при постоянной температуре t_0. Определить эту температуру, если известно, что при откачке сосуда на верхней поверхности слоя льда установилась температура $t_1=-50$ °С. Теплопроводность льда $\varkappa=5,3\cdot10^{-3}$ кал/(с·см·°С). Удельная теплота сублимации льда $q=680$ кал/г. Упругость насыщенного пара над льдом при $t_1=-50$ °С в отсутствие откачки равна $P=0,03$ мм рт. ст.

544. Найти коэффициент объемного расширения α, изотермическую сжимаемость γ_T и теплоемкость C_p неоднородной равновесной системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара.

545. Рассмотрев цикл Карно для системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара, и применив к нему теорему Карно, выразить производную давления насыщенного пара по температуре dP/dT через удельные объемы пара и жидкости $v_п$, $v_ж$ и удельную теплоту парообразования q.

546. Найти изменение температуры ΔT плавления льда при повышении давления на $\Delta P=1$ атм. Удельный объем воды при 0 °С $v_ж=1$ см³/г, удельный объем льда $v_л=1,091$ см³/г, удельная теплота плавления льда $q=80$ кал/г. По найденному значению ΔT рассчитать приближенно температуру тройной точки воды.

547. Ромбическая сера превращается в моноклинную при $t=96,5$ °С. При атмосферном давлении удельная теплота

превращения $q=2{,}2$ кал/г. Скачок удельного объема серы при фазовом превращении $\Delta v=0{,}014$ см³/г. Найти смещение ΔT точки фазового перехода серы при изменении давления на $\Delta P=1$ атм.

548. Найти давление насыщенного водяного пара при температуре 101 °С. Считать пар идеальным газом.

549. В закрытом сосуде с объемом $V_0=5$ л находится 1 кг воды при температуре $t=100$ °С. Пространство над водой занято насыщенным водяным паром (воздух выкачан). Найти увеличение массы насыщенного пара Δm при повышении температуры системы на $\Delta T=1$ К. Удельная теплота парообразования $q=539$ кал/г.

Указание. При расчетах пар считать идеальным газом. Удельным объемом воды пренебречь по сравнению с удельным объемом пара.

550. При 0 °С упругость водяного пара над льдом $P_1=4{,}58$ мм рт. ст. Удельная теплота плавления льда при 0 °С $q_1=80$ кал/г. Теплота испарения воды при 0 °С $q_2=596$ кал/г. Найти упругость водяного пара над льдом при температуре $t=-1$ °С.

551. Найти удельную теплоту испарения бензола $q_{исп}$ вблизи его тройной точки, если известно, что при этих условиях его удельная теплота плавления $q_{пл}=30{,}2$ кал/г, температура тройной точки $T=279$ К, равновесное давление пара в тройной точке $P=36$ мм рт. ст. и для кривой возгонки в той же точке $dP/dT=2{,}43$ мм рт. ст/К. Считать пар бензола идеальным газом.

552. Уксусная кислота при атмосферном давлении плавится при температуре $t=16{,}6$ °С. Разность удельных объемов жидкой и твердой фаз уксусной кислоты $\Delta v=0{,}16$ см³/г. Точка плавления уксусной кислоты смещается на $\Delta T=1$ К при изменении давления на $\Delta P=41$ атм. Найти удельную теплоту плавления q уксусной кислоты.

553. В следующей таблице приведены давления насыщенных паров азота при трех температурах:

t, °С	P, мм рт. ст.
−195	833
−196	741
−197	657

Пользуясь ими, вычислить удельную теплоту испарения q жидкого азота при температуре $t = -196$ °C. Считать, что газообразный азот вплоть до температуры конденсации подчиняется уравнению Клапейрона. Удельным объемом жидкого азота по сравнению с газообразным пренебречь.

554. Кусок льда помещен в адиабатическую оболочку при температуре 0 °C и атмосферном давлении. Как изменится температура льда, если его адиабатически сжать до давления $P = 100$ атм? Какая доля льда $\Delta m/m$ при этом расплавится? Удельные объемы воды $v_в = 1$ см³/г, льда $v_л = 1{,}09$ см³/г. Теплоемкости воды и льда связаны соотношением $c_л \approx 0{,}6\ c_в$.

555. Показать, что вблизи абсолютного нуля касательная к кривой плавления $P = P(T)$ на диаграмме P, T становится горизонтальной. Точнее, $\lim\limits_{T \to 0} \frac{dP}{dT} = 0$. Это утверждение справедливо, когда удельные объемы твердой и жидкой фаз различны. Конкретно речь может идти о гелии II — единственном веществе, которое может оставаться жидким вплоть до абсолютного нуля температур. (Ср. с задачей 504.)

556. Киевский физик М. П. Авенариус показал, что при критической температуре теплота испарения равна нулю. Проверить это положение, пользуясь уравнением Клапейрона — Клаузиуса.

557. Как показал Д. И. Менделеев, поверхностное натяжение жидкости при критической температуре равно нулю. Как можно это доказать?

558. Найти зависимость давления насыщенного пара от температуры в следующих упрощающих предположениях: удельную теплоту парообразования q считать не зависящей от температуры; удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом пара; к жидкости применимо уравнение состояния Клапейрона. (Эти упрощения допустимы вдали от критической температуры, если интервал изменения температур не слишком широк.)

559. Вывести формулу, выражающую зависимость давления насыщенного пара от температуры при следующих предположениях: 1) пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона; 2) удельная теплота испарения q является линейной функцией температуры, т. е. $q = q_0 - aT$; 3) удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом насыщенного пара.

560. Найти повышение температуры кипения воды при увеличении давления ее насыщенного пара на одну избыточную атмосферу вблизи точки кипения воды в нормальных условиях. Удельная теплота испарения воды в этих условиях $q=539$ кал/г.

561. Найти удельный объем водяного пара $v_п$ при 100 °С и нормальном давлении, если известно, что при давлении 735,5 мм рт. ст. температура кипения воды равна 99,1 °С. Удельная теплота парообразования при 100 °С $q=539$ кал/г.

562. В закрытом сосуде при температуре $t=20$ °С находится влажный воздух с относительной влажностью $f=80\%$. На сколько градусов надо понизить температуру стенок сосуда, чтобы на них начала выпадать роса? Удельная теплота парообразования воды при 20 °С $q=600$ кал/г. Водяной пар рассматривать как идеальный газ.

563. В следующей таблице приведены значения давления насыщенных паров над водой и льдом при трех температурах:

	t, °С	P, мм рт. ст.
Лед	—10	1,950
	0	4,579
Вода	0	4,579
	10	9,209

Используя эти данные, вычислить удельную теплоту замерзания воды при 0 °С.

564. В тонкостенный металлический шар радиуса $r=10$ см, из которого выкачан воздух, налита вода. Давление воздуха вне шара равно атмосферному. До какой максимальной температуры можно нагреть воду, чтобы стенки шара не разорвались, если предельное натяжение на разрыв, которое они могут выдержать, $\sigma=88$ Н/см. Количество воды в шаре таково, что при этой температуре еще не вся вода испаряется, однако объем воды мал по сравнению с объемом пара.

565. По одной из теорий гейзеры представляют собой большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом. Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает,

когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал практически заполнен только паром, который и выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала, т. е. расстояние от подземного резервуара до поверхности Земли, $h=90$ м.

566. Определить удельную теплоемкость c насыщенного пара, расширяющегося (или сжимающегося) таким образом, что во время процесса он все время остается насыщенным. Пренебречь удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом ее насыщенного пара. Считать, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Произвести численный расчет для воды при температуре $T=373$ К, считая, что к водяному пару применима классическая теория теплоемкостей. Удельная теплота парообразования для воды при 373 К равна $q=539$ кал/г.

567. Решить предыдущую задачу, зная удельную теплоту испарения q и ее производную по температуре dq/dT, но не предполагая, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Результат сравнить с приближенной формулой (567.1). Для воды при $t=100\ °C$ $dq/dT=-0{,}64$ кал/(г·К), $c_P^{ж}=1{,}01$ кал/(г·К).

568. Насыщенный водяной пар при температуре $T=300$ К подвергается адиабатическому сжатию и адиабатическому расширению. В каком из этих процессов пар превращается в ненасыщенный и в каком в пересыщенный?

569. Определить изменение энтропии системы, состоящей из воды и насыщенного пара, при переходе ее в насыщенный пар. Начальная температура системы T_1, конечная T_2. Начальная масса пара m_1, конечная m_2. Зависимостью удельной теплоты парообразования воды q от температуры пренебречь. Пар рассматривать как идеальный газ.

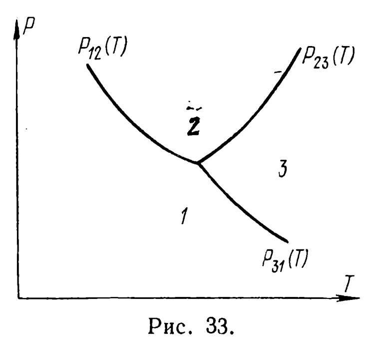


Рис. 33.

570. Три фазы *1*, *2*, *3* находятся в равновесии друг с другом в тройной точке (рис. 33). Их удельные объемы в этой точке равны соответственно v_1, v_2, v_3. Пусть $P_{12}=P_{12}(T)$, $P_{23}=P_{23}(T)$, $P_{31}=P_{31}(T)$ — уравнения кривых равновесия между фазами *1* и *2*, *2* и *3*, *3*

и *1*. Показать, что в тройной точке имеет место соотношение

$$(v_1 - v_2)\frac{dP_{12}}{dT} + (v_2 - v_3)\frac{dP_{23}}{dT} + (v_3 - v_1)\frac{dP_{31}}{dT} = 0.$$

571. Определить приближенно давление и температуру (по шкале Цельсия) в тройной точке воды, пользуясь следующими данными. Давления насыщенного пара над жидкой водой: $P_1 = 4{,}579$ мм рт. ст. при $t = t_1 = 0$ °С, $P_2 = 4{,}926$ мм рт. ст. при $t = t_2 = 1$ °С. Удельный объем льда при 0 °С и нормальном атмосферном давлении ($P_0 = 760$ мм рт. ст.) $v_1 = 1{,}091$ см³/г, удельный объем воды при тех же условиях $v_2 = 1$ см³/г. Удельная теплота плавления льда $q = 80$ кал/г.

572. Температура воды в тройной точке $t = 0{,}0075$ °С, удельная теплота плавления льда при этой температуре $q_{12} = 80$ кал/г. Удельный объем водяного пара в тройной точке $v_3 = 206\,000$ см³/г. По сравнению с ним удельными объемами льда v_1 и воды v_2 можно пренебречь. Что больше — давление насыщенного пара над водой P_1 или над льдом P_2 при температуре 0 °С? Чему равна разность $P_1 - P_2$?

573. Стакан наполнен водой до высоты 10 см. На дне его лежат капиллярные трубки, запаянные с одного конца и заполненные воздухом. Когда вода кипит, на открытых концах капилляров образуются пузырьки пара, диаметр которых в момент отрыва равен 0,2 мм. Чему равна температура воды на дне сосуда во время кипения, если атмосферное давление равно 760 мм рт. ст.? Поверхностное натяжение кипящей воды 57 дин/см, а упругость водяного пара вблизи 100 °С возрастает на 2,7 см рт. ст. при повышении температуры на 1 °С.

574. Допустим, что жидкость в широком сосуде с погруженной в нее капиллярной трубкой накрыта колпаком (рис. 34) и весь прибор помещен в термостат. В состоянии термодинамического равновесия давление пара во всех точках всякой горизонтальной плоскости будет одним и тем же. Иначе под действием разности давлений возникло бы непрерывное движение пара, которым можно было бы восполь-

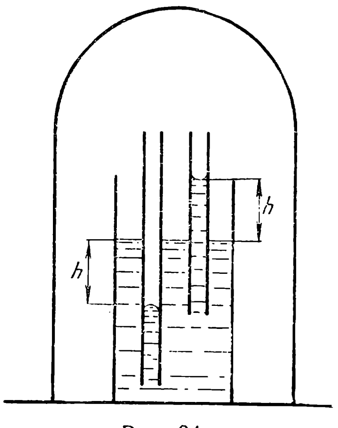


Рис. 34.

зоваться для производства работы с помощью какой-либо надлежаще устроенной периодически действующей машины. Эта работа непрерывно производилась бы за счет тепла, заимствованного от термостата. Но такой круговой процесс невозможен, поскольку он противоречит второму началу термодинамики. Исходя из этих соображений, В. Томсон показал, что давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью жидкости должно быть больше, а над вогнутой — меньше, чем над плоской поверхностью. Показать это и вычислить соответствующее изменение давления насыщенного пара. Рассмотреть два случая: 1) когда диаметр капилляра велик, так что плотность пара на протяжении высоты h меняется незначительно; 2) когда диаметр капилляра мал, так что изменения плотности пара на протяжении высоты h сравнимы с самой плотностью. В обоих случаях изменениями плотности жидкости с высотой пренебречь.

575. Вычислить давление насыщенного водяного пара над сферической поверхностью капли воды с радиусом 1) $r_1=10^{-5}$ см (капелька тумана), 2) $r_2=10^{-7}$ см при 20 °С. При такой температуре для воды $\sigma=72{,}7$ дин/см, $v_ж=1{,}002$ см^3/г, $P_0=17{,}5$ мм рт. ст.

576. Найти стационарный поток пара от сферической капли жидкости радиуса a в процессе ее испарения (или конденсации пара на капле). Коэффициент диффузии паров жидкости в воздухе равен D, плотность пара на большом расстоянии от капли ρ_∞, плотность насыщенного пара $\rho_н$. Найти также плотность пара ρ в зависимости от расстояния r от центра капли. Зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости не учитывать.

577. Пользуясь аналогией между уравнениями стационарной диффузии и электростатики, найти стационарный поток пара от жидкой капли произвольной формы. Остальные условия совпадают с условиями предыдущей задачи.

578. Найти время испарения $\tau_{исп}$ водяной капли с начальным радиусом a в воздухе с относительной влажностью f и температурой $t=20$ °С. Рассмотреть два случая: 1) $f=40\%$, $a=1$ мм, 2) $f=99\%$, $a=1$ мкм. При $t=20$ °С давление насыщенных водяных паров $P_н=17{,}5$ мм рт. ст., $D=0{,}22$ см^2/с.

Указание. Считать процесс испарения капли стационарным. Это допустимо, если плотность пара $\rho_п$ гораздо меньше плотности жидкости $\rho_ж$.

579. Найти время испарения $\tau_{исп}$ сферической капли жидкости радиуса a в атмосфере, насыщенной парами этой

жидкости, учитывая зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности. Поверхностное натяжение жидкости (воды) $\sigma=73$ дин/см, температура $t=20\,^\circ$C. Рассмотреть два случая: 1) $a=100$ мкм, 2) $a=1$ мкм. (См. задачу 574.)

580. Найти закон изменения во времени размеров водяной капли, если в ней растворено m граммов поваренной соли. Капля находится в атмосфере, насыщенной водяными парами. Предполагается, что раствор разбавленный.

581. На рис. 35 представлены два сообщающихся сосуда, заполненные одной и той же жидкостью. Полупроницаемая перегородка MN свободно пропускает молекулы пара, но не пропускает молекулы нейтрального газа, добавленного к пару в правом сосуде. Поршень E не позволяет нейтральному газу перетекать из правого сосуда в левый. Вся система помещена в термостат, температура которого поддерживается постоянной. Применив к такой системе второе начало термодинамики, найти влияние давления нейтрального газа на давление насыщенного пара жидкости.

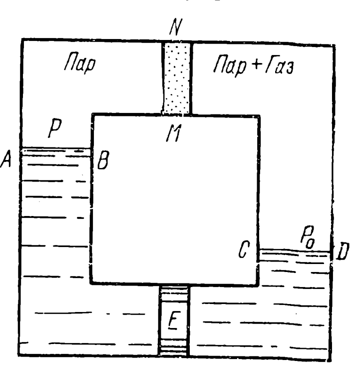


Рис. 35.

582. В цилиндре под поршнем помещена вода, над которой находится смесь воздуха и насыщенных водяных паров. Начальное давление на поршень равно атмосферному (1 атм). Затем давление на поршень увеличивают в два раза. На сколько процентов изменится давление насыщенного водяного пара в цилиндре, если температура ($T=300$ K) сохраняется неизменной?

583. В толстостенном закрытом сосуде помещен кусок льда, над которым находится насыщенный водяной пар. В сосуд можно нагнетать воздух до высокого давления. На сколько надо повысить давление воздуха в сосуде, чтобы давление насыщенного пара над льдом повысилось на один процент, если температура ($T=250$ K) поддерживается постоянной? Удельный объем льда $v_л=1,1$ см^3/г.

584. При прохождении через перегретую жидкость ионизующей частицы вдоль ее траектории образуются мельчайшие пузырьки пара. Те из пузырьков, радиус которых боль-

ше «критического радиуса» $R_{кр}$, быстро вырастают до видимых размеров, а пузырьки меньших размеров захлопываются силами поверхностного натяжения. Определить $R_{кр}$ для жидкого пропана (C_3H_8), если в камере он находится под давлением $P_ж=5$ атм при температуре $T=328$ К. Давление насыщенного пара пропана при этой температуре $P_п=15$ атм, поверхностное натяжение пропана $\sigma_п=4{,}46$ дин/см.

585. Кривая плавления гелия-3 проходит через точку $T_1=0{,}12$ К, $P_1=31$ атм. При каком давлении P_2 будут находиться в равновесии твердая и жидкая фазы гелия-3 при температуре $T_2=0{,}42$ К? Найти уравнение кривой плавления гелия-3 в переменных T, P в интервале между этими температурами. Молярная энтропия жидкого гелия-3 в рассматриваемой области температур и давлений определяется выражением $S_ж=RT/\Theta$, где R — газовая постоянная, а $\Theta=0{,}46$ К. Молярная энтропия твердого гелия-3 не зависит от температуры и равна $S_{тв}=R\ln 2$. Разность молярных объемов жидкого и твердого гелия-3 считать постоянной и равной $V_ж-V_{тв}=1{,}25$ см^3. Найти также величину и знак молярной теплоты плавления q для температур T_1 и T_2.

586. При некоторой температуре Θ происходит фазовый переход, в результате которого кристаллическая решетка из кубической превращается в тетрагональную с осями a и $c>a$. Описать качественно, как ведет себя отношение осей c/a с изменением температуры T вблизи Θ при фазовых переходах 1-го и 2-го рода.

587. При фазовых переходах 2-го рода нет ни скачка объема, ни скачка энтропии, т. е. $\Delta V=0$ и $\Delta S=0$ (к таким переходам относится, например, переход в железе и других ферромагнетиках из парамагнитного состояния в ферромагнитное). Показать, что при переходе 2-го рода скачки различных величин (обозначаемые знаком Δ) удовлетворяют соотношениям Эренфеста, т. е.

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P+\frac{dP}{dT}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=0, \qquad \frac{\Delta C_P}{T}-\frac{dP}{dT}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V+\frac{dV}{dt}\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=0, \qquad \frac{\Delta C_V}{T}+\frac{dV}{dT}\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=0,$$

где производные dP/dT и dV/dT берутся вдоль линии перехода, на которой переменные P, V и T, помимо уравнения состояния, связаны между собой еще одним соотношением.

588. В задачах 133 и 257 найден адиабатический температурный градиент воздушной атмосферы, находящейся в тепловом и механическом равновесии, без учета влажности

воздуха. Найти значение адиабатического градиента температуры, учитывая выделение теплоты парообразования при конденсации водяных паров при адиабатическом поднятии вверх влажного воздуха. Считать, что температура воздуха значительно ниже температуры кипения воды.

589. На рис. 36 приведена кривая растворимости фенола в воде и воды в феноле. Кривая $MAKBN$ делит плоскость рисунка на две области: верхней области соответствует однофазное, а нижней — двухфазное состояния вещества. Показать, что массы насыщенного раствора фенола в воде $m_{фв}$ и воды в феноле $m_{вф}$ связаны соотношением

$$m_{фв}/m_{вф} = AC/CB.$$

(правило рычага).

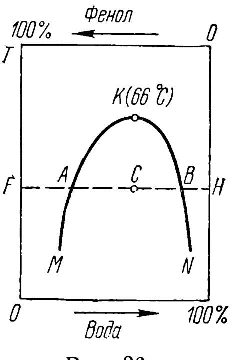


Рис. 36.

590. Показать, что при одной и той же температуре насыщенный пар имеет один и тот же состав и одинаковое давление над насыщенным раствором жидкости *1* в жидкости *2* и над насыщенным раствором жидкости *2* в жидкости *1*.

591. Весовой концентрацией $c_{вес}$ называется отношение массы растворенного вещества m к общей массе раствора m_0+m (m_0— масса растворителя). Весовая концентрация обычно выражается в процентах. Молярной или молекулярной концентрацией $c_{мол}$ называется отношение числа молей растворенного вещества к общему числу молей раствора. Найти связь между весовой и молярной концентрациями.

592. Найти осмотическое давление $P_{осм}$ пятипроцентного раствора тростникового сахара ($C_{12}H_{22}O_{11}$) в воде при 18 °C.

593. При какой температуре t осмотическое давление двухпроцентного раствора поваренной соли в воде будет равно 15 атм? Считать степень диссоциации α поваренной соли равной 75%.

594. Осмотическое давление раствора $m=36$ г глюкозы в 2,24 л воды при 27 °C равно 1,1 атм. Найти относительную молекулярную массу μ глюкозы.

595. Чему равно осмотическое давление $P_{осм}$ электролита, степень диссоциации которого α, если молекула электролита расщепляется при диссоциации на n ионов?

596. Найти осмотическое давление $P_{осм}$ однопроцентного раствора натриевой селитры ($NaNO_3$) в воде при 27 °С. Считать при этом, что селитра полностью диссоциирована.

597. Почему стенки стакана, в который налит раствор, не разрушаются под действием осмотического давления?

598. Разбавленный раствор нелетучего вещества и чистый растворитель в сообщающихся сосудах разделены полупроницаемой пленкой, а сосуды покрыты колпаком. Написать условие равновесия раствора и растворителя с паром растворителя и вывести из него зависимость между осмотическим давлением $P_{осм}$ и разностью давлений $(P—P_0)$ насыщенного пара над раствором и над растворителем.

599. Давление насыщенного пара нелетучего вещества над раствором меньше, чем над чистым растворителем. Выразить разность этих давлений через отношение общего числа молей ν' растворенного вещества к числу молей ν растворителя, предполагая, что раствор — разбавленный.

600. Каково давление насыщенных паров воды P над раствором сахара, если число молей сахара составляет 5% от общего числа молей растворителя? Температура раствора 20°С. Давление насыщенного водяного пара при 20 °С равно $P_0=17{,}535$ мм рт. ст.

601. Показать, что температура кипения раствора нелетучего вещества повышается по сравнению с температурой кипения чистого растворителя. Пользуясь законом Рауля, рассчитать это повышение для разбавленного раствора.

602. Показать, что температура замерзания раствора нелетучего вещества понижается по сравнению с температурой замерзания чистого растворителя. Используя результат решения предыдущей задачи, рассчитать это понижение для разбавленного раствора.

603. Один грамм тростникового сахара (относительная молекулярная масса 342) растворен в 100 см³ воды. Определить точку кипения этого раствора при нормальном атмосферном давлении. Плотность воды при температуре 100 °С равна 0,96 г/см³, удельная теплота парообразования 539 кал/г.

604. В предыдущей задаче определить температуру замерзания при атмосферном давлении. Удельная теплота плавления $q=80$ кал/г.

605. При какой температуре $T_к$ кипит раствор 100 г поваренной соли в 1 л воды? Считать поваренную соль полностью диссоциированной. Удельная теплота парообразования воды $q=539$ кал/г. Внешнее давление равно 760 мм рт. ст.

606. Водный раствор сахара повышает точку кипения при нормальном атмосферном давлении на $\Delta t=0{,}05\,°C$. Определить температуру замерзания t этого раствора при том же давлении. Удельные теплота плавления льда $q_1=80$ кал/г, теплота парообразования воды $q_2=539$ кал/г.

607. Растворение $m=1$ г йода в $M=285$ г этилового эфира повышает температуру кипения последнего на $\Delta T=0{,}032\,°C$. Из какого числа атомов n состоит молекула воды в растворе? Относительная атомная масса йода $A=127$, температура кипения этилового эфира $T=307{,}8$ К, удельная теплота парообразования $q=81{,}5$ кал/г.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1. Температура. Термические свойства тел

1. $t = 1{,}475 t_{\text{Фл}} - 18{,}75$.

2. $t = -\frac{2}{3} t_{\text{D}} + 100$.

3. $t = -38\frac{2}{3}$ °C.

4. $t = \frac{t_{\text{п}} - t_0}{t_H - t_0} T_H$.

5. $t_{\text{п}} = \frac{t}{100}(t_H - t_0) + t_0 = 67{,}7$ град.

6. $\frac{l}{l_1} = \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha_1 - 3\beta}$.

7. В области от 0 до 7,9 °C термометр будет давать одинаковые показания при двух разных температурах t_1 и t_2, причем $t_1 + t_2 = 7{,}9$ °C.

8. $t_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0\alpha - P_1\alpha_0}$.

9. $x = t + \frac{k}{m}\Delta t = 33{,}4$ °C.

10. $\tau = 100 \frac{\ln(1 + \alpha t)}{\ln(1 + 100\alpha)}$, где α — коэффициент объемного расширения газа.

11. $t = \frac{r_t - r_{18}}{r_{18}\varkappa} + 18$ °C $= 54{,}1$ °C.

12. Приблизительно с точностью $\Delta t = \frac{\Delta R}{R\varkappa} = 0{,}0025$ °C.

13. $$\Theta - t = \frac{\alpha_2 - 3(\beta_1^2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - 3\beta_1) + 100\left[\alpha_2 - 3(\beta_1^2 + \beta_2)\right]} t(t - 100) \approx$$
$$\approx 1{,}84 \cdot 10^{-5} t (t - 100).$$
Отклонение максимально при $t = 50$ °C и составляет $\Theta - t \approx -0{,}046$ °C.

14. В обоих случаях приращение температуры T по рассматриваемой шкале связано с приращением давления ΔP соотношением $\Delta T = A(V)\Delta P$, где коэффициент $A(V)$ зависит только от объема газа, т. е. остается постоянным. Отсюда и получается требуемый результат.

15. После измерения температуры обычным способом надо немедленно встряхнуть термометр. Тогда он покажет температуру тела человека.

16. $\alpha = \dfrac{m_1(1+\alpha_1 t) - m_0}{m_0 t}$.

17. $\alpha_1 = \dfrac{m - m_1}{m_1(t_1 - t)} + \alpha$.

18. $\alpha = 3\beta + \dfrac{m - m_1}{m(t_1 - t)}$.

19. $\beta = \dfrac{a \operatorname{tg} \varphi}{10 l_0 (t_1 - t_0)} = 0{,}0000183\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

20. $x = \dfrac{1}{t}\left\{\dfrac{\rho_0}{m}\left[\left(\dfrac{m}{\rho_0} + \dfrac{M_0}{\delta_0}\right)(1+\beta t) - \dfrac{M_t}{\delta_0}(1+\alpha t)\right] - 1\right\}$.

21. $\alpha = \dfrac{h - h_0}{100 h_0}$, где h и h_0 — высоты столбов жидкости при температуре 100 и 0 °C.

22. $H_0 = H_1[1 - t_1(\alpha - \beta)] = 748{,}0$ мм.

23. $n_2 - n_1 \approx 9{,}5$ оборота.

24. Уровень воды не изменится.

25. $S = \pi r^2 [1 + (\beta_\parallel + \beta_\perp)(t_2 - t_1)]$.

26. $V_2 = \pi r^2 l [1 + (\beta_\parallel + 2\beta_\perp)(t_2 - t_1)] = 16{,}14$ см^3.

27. $\alpha = \beta_x + \beta_y + \beta_z$, $\beta_s = \beta_x s_x^2 + \beta_y s_y^2 + \beta_z s_z^2$.

28. Решение. Оставляя z постоянным, пишем $(\partial f/\partial x)\,dx + (\partial f/\partial y)\,dy = 0$, откуда находим dy/dx. Найденная величина будет иметь смысл частной производной $(\partial y/\partial x)_z$, поскольку мы предполагали, что $z = \mathrm{const}$. Итак, $(\partial y/\partial x)_z = -(\partial f/\partial x)_z/(\partial f/\partial y)_z$. Аналогично находим и остальные частные производные $(\partial x/\partial z)_y$ и $(\partial z/\partial y)_x$. Перемножая их, получим требуемое соотношение.

29. Решение. Коэффициенты α, λ и γ определяются выражениями [1])

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P_0}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \gamma = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

Отсюда находим частные производные $(\partial V/\partial T)_P$, $(\partial T/\partial P)_V$, выражен-

[1]) Коэффициенты α и λ часто определяются выражениями

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

Для твердых и жидких тел между этими определениями по существу нет разницы. Первое определение обладает тем преимуществом, что для идеальных газов величины α и λ оказываются постоянными, тогда как при втором определении они меняются обратно пропорционально абсолютной температуре T. Величина γ называется также изотермической сжимаемостью вещества.

ные через α, λ, γ. Величины V, T, P связаны уравнением состояния $f(V, T, P)=0$, поэтому в силу (28.1)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1. \qquad (29.2)$$

Подставляя сюда найденные выражения для частных производных, получаем соотношение (29.1).

30. $\lambda = 46\ ^\circ\text{C}^{-1}$.

31. На 460 атм.

32. $F = SE\beta\,\Delta t = 250$ Н.

33. $T = E\beta(t_1 - t_0)S = 1{,}4\cdot 10^6$ Н.

34. $\rho = \rho_0(1+\gamma P) = 1{,}054$ г/см^3.

35. $P_{\max} \approx \dfrac{E}{3(1-2\sigma)}\dfrac{\rho_0-\rho}{\rho_0} \approx 19\,000$ атм, где ρ_0 — плотность воды.

37. Решение. Расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника $a = l(1-x/2)$, где l — длина никелевой трубки.

Будем приближенно рассматривать маятник как математический. Компенсация теплового расширения сводится тогда к требованию, чтобы величина a не изменялась с изменением температуры, т. е. $da/dl = 0$, или

$$2\left(1-\frac{x}{2}\right) - l\frac{dx}{dl} = 0.$$

Найдем dx/dl. Длина никелевой трубки $l = l_0(1+\beta t)$, ее внутренний объем $V = V_0(1+3\beta t)$, объем ртути $v = v_0(1+\alpha t)$. Часть объема трубки, занятая ртутью, равна $x = v/V = x_0[1+(\alpha-3\beta)t]$, где $x_0 = v_0/V_0$ — значение дроби x при $t = 0$ °C. Отсюда находим

$$dx = x_0(\alpha-3\beta)\,dt \approx x(\alpha-3\beta)\,dt, \quad dl = l_0\beta\,dt \approx l\beta\,dt,$$

т. е.

$$\frac{dx}{dl} = \frac{x}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}-3\right).$$

Условие компенсации принимает вид

$$\left(1-\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}-3\right) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2}{\alpha/\beta - 3} = \frac{1}{8}.$$

Учтем теперь несовпадение центра качания с центром масс маятника. Используя известную формулу для приведенной длины L физического маятника, нетрудно получить

$$L = \frac{2}{3}\frac{3-3x+x^2}{2-x}\,l.$$

Надо потребовать, чтобы эта величина не изменялась с изменением температуры, т. е. $dL/dx = 0$. Рассуждая, как выше, приходим к уравнению

$$(x^3 - 5x^2 + 9x - 6) + (\alpha/\beta - 3)(x^2 - 4x + 3)\,x = 0,$$

или после подстановки численного значения $\alpha/\beta = 18$:

$$16x^3 - 65x^2 + 54x - 6 = 0.$$

Для отыскания нужного корня этого кубического уравнения полагаем $x = 1/8 + \delta$, где δ — малая поправка. Подставляя это выражение в предыдущее уравнение и отбрасывая кубы и квадраты поправки δ, получаем для нее линейное уравнение, из которого находим $\delta = 0{,}006$. Следовательно,

$$x = 0{,}125 + 0{,}006 = 0{,}131.$$

38. Приводим объяснение Мозели в изложении Тиндаля. «Свинец был подвержен перемене температур дня и ночи. Теплота, сообщаемая ему днем, заставляла его расширяться. Если бы он лежал на горизонтальной плоскости, то он расширялся бы во все стороны одинаково; но, лежа на наклонной поверхности, он расширялся книзу свободнее, чем вверх. Напротив, ночью, когда свинец сжимается, его верхняя часть легче опускается вниз, чем нижняя поднимается вверх. Движение свинца, следовательно, совершенно походило на движение земляного червяка. Днем он подвигал вперед свою нижнюю часть, а ночью верхнюю, и таким образом в два года он подвинулся на расстояние в 18 дюймов. Каждое временно́е изменение температуры дня и ночи способствовало такому движению, и Канон Мозели нашел впоследствии, что сильнейшее опускание свинца происходило при быстрых изменениях температуры».

§ 2. Идеальные газы

39. $\alpha = \frac{1}{T_0}$, $\lambda = \frac{1}{T_0}$, $\gamma_T = \frac{1}{P}$, $K_T = P$. Здесь T_0 — абсолютная температура, соответствующая нулевой температуре по шкале Цельсия [1]).

41. $\frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M}\frac{1}{\mu_1} + \frac{M_2}{M}\frac{1}{\mu_2} + \frac{M_3}{M}\frac{1}{\mu_3} + \ldots$

42. $\rho = \frac{\mu P}{RT} = 0{,}065$ г/см^3.

---

[1]) Если бы пользоваться вторым определением коэффициентов α и λ, приведенным в примечании к решению задачи 29, то мы получили бы $\alpha = \lambda = 1/T$, т. е. при таком определении коэффициенты α и λ для идеальных газов не были бы постоянными.

43. $\rho=\frac{760\,(M-m)}{V\,(H-h)}$.

44. $m \approx 105$ г.

45. $n=\frac{\ln\,(P_2/P_1)}{\ln\,[V/(V+v)]}$.

46. $H=\frac{(l'+l)\,h}{l-l'}$.

47. $\Delta l=\frac{1}{2}\left[H+l+l'-\sqrt{(H+l+l')^2-4l'H}\right]$.

48. $\frac{H+l-\sqrt{H^2+l^2}}{2}$.

49. $S \approx 0{,}004$ см².

50. $l \approx 4{,}3$ мм.

51. Вместо 0,35 мм рт. ст. манометр будет показывать 0,33 мм рт. ст.

52. $V=10{,}9$ л.

53. $m=1{,}15$ г.

54. $V=\frac{M}{\rho_0\left(\frac{1}{1+\alpha t_1}-\frac{1}{1+\alpha t_2}\right)}=1000$ м³, где α — коэффициент расширения газов.

55. $M=7{,}2$ г.

56. $P=\rho_0 gl\left(\frac{1}{1+\alpha t_2}-\frac{1}{1+\alpha t_1}\right)=14$ мм вод. ст., где α — коэффициент расширения газов.

57. $p_1=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\,\frac{L-h_1}{L-h}\,(H-h_1)$, где α — коэффициент расширения газов.

58. $$h_1=-\frac{1}{2}\,(2l+H_1-h)+$$
$$+\sqrt{\frac{1}{4}\,(2l+H_1-h)^2+\frac{2T_1}{T_0}\,(H_0+h)\,l-H_1\,(2l-h)}.$$

59. $m=\frac{2M\sigma}{3RT\rho}\,\mu=488$ г, где μ — относительная молекулярная масса азота.

60. Решение. Пусть P — давление газа в откачиваемом сосуде, а P_1 — на конце капилляра, примыкающем к насосу (давление в насосе). Обозначим через m массу газа в откачиваемом сосуде, а через V — его объем. Тогда

$$\frac{dm}{dt}=\frac{P_1-P}{w}. \qquad (60.1)$$

Объем dV, занимаемый массой газа dm при давлении P_1, определяется соотношением $P_1 dV = -\frac{dm}{\mu} RT$, откуда

$$P_1 K = -\frac{RT}{\mu}\frac{dm}{dt}. \qquad (60.2)$$

Для давления P в откачиваемом сосуде имеем: $PV = \frac{m}{\mu} RT$, и, следовательно,

$$V\frac{dP}{dt} = \frac{RT}{\mu}\frac{dm}{dt}. \qquad (60.3)$$

Исключая из (60.1)—(60.3) P_1 и dm/dt и интегрируя, найдем

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{t}{V\left(\frac{\mu w}{RT} + \frac{1}{K}\right)}\right\}. \qquad (60.4)$$

61. $\tau = \frac{V}{K}\ln\frac{P_0}{P} \approx 370$ с.

62. $\tau = \left(2{,}18\cdot 10^4 \frac{l}{RD^3}\sqrt{\frac{\mu}{T}} + \frac{1}{K}\right) V \ln\frac{P_0}{P} = 64{,}5$ с, где μ — относительная молекулярная масса газа.

63. $P = \frac{P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1}{V_1T_2 + V_2T_1} = 224$ мм рт. ст., где T_1 и T_2 — абсолютные температуры сосудов.

64. Решение. Не нарушая общности, можно предположить, что площадь поперечного сечения цилиндра равна единице. Начало координат поместим на дне цилиндра, а ось X направим вертикально вверх. Прежде всего, если газ находится в равновесии, то давление P может зависеть только от x. В противном случае существовала бы горизонтальная слагающая градиента давления газа, которая не уравновешивалась бы внешними силами, в результате чего в газе возникло бы движение. Если давление на дно цилиндра равно P_0, а на крышку — P, то по условию задачи требуется

$$P_0 - P = \int_0^x g\rho\, dx,$$

и это равенство должно соблюдаться, каково бы ни было x. Путем дифференцирования находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -g\rho.$$

Подставляя сюда $P = \frac{RT}{\mu}\rho$ и интегрируя, получим барометрическую формулу (64.1).

§ 3. Работа и количество тепла. Первое начало термодинамики

65. $t = \frac{m_1 c t_1 - mq}{m + m_1}$, где c — удельная теплоемкость воды.

66. $m = \frac{M(q_э - c_э t_1)}{c_в t_0 + q_в} = 80$ г, где $c_в$ и $q_в$ — удельные теплоемкость и теплота замерзания воды.

67. $c_2 = \frac{mc + m_1 c_1}{m_2} \frac{t - t_0}{t_2 - t} = 0{,}092$ кал/(г·°C), где c — удельная теплоемкость воды.

68. $c' = \frac{1}{m'} \left[(cm + C_1) \frac{t_1 - t_0}{t_1' - t_0} - C_1' \right]$.

69. $m = 0{,}125$ кг.

70. $m = 1{,}1$ г.

71. $E = \frac{2\pi R m g N}{(M + w) c \Delta t}$, где c — удельная теплоемкость воды.

72. $v = 340$ м/с.

73. $Q = 1{,}28 \cdot 10^9$ эрг.

74. $Q_{142} = Q_{132} - A_{132} + A_{142} = 60$ Дж.

$Q_{21}' = Q_{132} - A_{132} + A_{21}' = 70$ Дж.

$Q_{14} = U_4 - U_1 + A_{142} = 50$ Дж.

$Q_{42} = Q_{142} - Q_{14} = 10$ Дж.

75. Решение. Применяя термохимическую символику (фигурные скобки — газ, круглые — жидкость, квадратные — твердое вещество), пишем

$$[C] + \{O_2\} = \{CO_2\} + Q_1, \quad \{CO\} + \frac{1}{2}\{O_2\} = \{CO_2\} + Q_2.$$

Исключая $\{CO_2\}$, находим

$$[C] + \frac{1}{2}\{O_2\} = \{CO\} + Q_1 - Q_2.$$

Отсюда $Q = Q_1 - Q_2 = 29$ ккал $= 121$ кДж.

76 $Q = Q_1 + Q_2 = 67{,}7$ ккал $= 283$ кДж.

77. $Q = 2Q_2 + Q_3 - Q_1 = 94$ кДж.

80. Результат следует из формулы $U = C_V PV/R$.

81. $Q = 0$.

82. $A = Q = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{P_1}{P_2}$.

83. $Q' = A' = \frac{m}{\mu} RT \ln n = 2{,}44$ кДж, где $\mu = 28$ — относительная молекулярная масса азота.

84. $E=\frac{\gamma R}{\mu(\gamma-1)c_P}=4{,}18$ Дж/кал.

85. $TV^{n-1}=\text{const}$, $PV^n=\text{const}$, где $n=\frac{C-C_P}{C-C_V}$.

1) $V=\text{const}$, 2) $P=\text{const}$, 3) $PV^\gamma=\text{const}$, 4) $PV=\text{const}$.

Постоянная n называется показателем политропы.

86. Нагревается при $n>1$, охлаждается при $n<1$.

87. 1) Газ охлаждается при расширении, причем его температура пропорциональна $\sqrt{P}$. 2) $C=C_V-R$. При расширении от газа должно отводиться тепло.

88. 1) Газ при расширении нагревается, причем его температура пропорциональна $\sqrt{V}$. 2) $C=C_P+R$. При расширении к газу должно подводиться тепло.

89. $C=\nu(3C_V-2C_P)=-0{,}163$ кал/°C, где $\nu=0{,}163$ — число молей.

90. $C=(C_V+C_P)/2=C_V+R/2=C_P-R/2$.

92. $TV^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)\alpha T/R}=\text{const}$, где $\gamma=C_P/C_V$.

93. $A=R(T_2-T_1)/2$.

94. $C=C_V+R/2$.

95. Решение. Элементарное количество тепла, получаемое первым газом, $\delta Q_1=C_V dT_1+P_1dV_1=C_VdT_1+RT_1dV_1/V_1$, а вторым — $\delta Q_2=0$. Поэтому $C_2=0$ и $C_VdT_2+RT_2dV_2/V_2=0$. Из равенства давлений P_1 и P_2 следует $V_1/V_2=T_1/T_2$, откуда $dV_1/V_1+dV_2/V_2=dT_1/T_1-dT_2/T_2$. А так как объем системы V_1+V_2 во время процесса не изменяется, то $dV_1+dV_2=0$. Исключая dV_2 и dT_2, получим

$$\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}+\frac{R}{C_V}\frac{1}{V_2}\right)dV_1=\frac{dT_1}{T_1}.$$

Используя также соотношение $C_P-C_V=R$, находим

$$\delta Q_1=\left(C_V+R\frac{V_2}{V_2+\gamma V_1}\right)dT_1.$$

Следовательно,

$$C_1=C_V+\frac{V_2}{V_2+\gamma V_1}R=\frac{V_1+V_2}{V_2+\gamma V_1}\gamma C_V.$$

При $V_1=V_2$

$$C_1=2\gamma C_V/(\gamma+1).$$

96. $C_1=\frac{V_1+\gamma V_2}{V_1+V_2}C_V$, $C_2=\infty$.

97. $A=\frac{P_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]=\frac{P_2V_2}{n-1}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}-1\right]$.

99. $\Delta U=\frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right]=1870$ Дж, где $\gamma=C_P/C_V=1{,}4$.

100. $\Delta U={}^3/_2P(V_2-V_1)=7{,}6\cdot10^4$ Дж.

101. $Q=910$ Дж.

102. $Q = 685$ Дж.

103. $Q = 15{,}5$ кДж.

104. $Q = 277$ кДж.

105. $\Delta U = (mc_p + m_1 c_{p1})\,\Delta t/\gamma = 1{,}25$ кДж.

106. $P_t = {}^2/_3 P_0 (1 + \alpha Q/C)$, где P_0 — начальное давление смеси, α — коэффициент объемного расширения.

107. $T = \dfrac{5P_1V_1 + 3P_2V_2}{5P_1V_1/T_1 + 3P_2V_2/T_2} = 352$ К $= 79$ °C;

$$P = \frac{T}{V_1 + V_2}\left(\frac{P_1V_1}{T_1} + \frac{P_2V_2}{T_2}\right) = 1{,}23 \text{ атм.}$$

108. Доказательство можно получить, использовав **выражение** для внутренней энергии идеального газа $U = PV/(\gamma - 1)$.

109. $c_v = \dfrac{PV}{RT}\,\dfrac{\mu_2 C_{V1} + \mu_1 C_{V2}}{\mu_1 + \mu_2} = 0{,}185$ кал/(г·°C).

110. $C_V = (2C_{V1} - C_{V2})\,\alpha + C_{V2} = 5{,}15$ кал/(моль·°C).

111. $Q' = AC_P/R = 25$ Дж.

112. $Q = AC_P/R = 25$ Дж.

113. $Q = \gamma A/(\gamma - 1) = 30$ Дж.

114. $Q_{132} = {}^{19}/_2\, RT_1$, $Q_{142} = {}^{17}/_2\, RT_1$, $Q_{12} = 9RT_1$, $C_{12} = 3R$.

115. $Q = \dfrac{V}{\gamma - 1}(P_1 - P_0) = 2{,}27 \cdot 10^4$ Дж.

116. $T_2 = T_1 (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$, $t_2 = 287$ °C.

117. $T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{\gamma - 1}$, $t_2 = 479$ °C.

118. $K_{\text{ад}} = \gamma P = \gamma K_T$.

119. $\gamma = 1{,}68$.

120. $P_2 = P_1 (V_1/V_2)^{\gamma} = 0{,}312$ атм.

122. $\gamma = \dfrac{\ln (P_0/P_1)}{\ln (P_2/P_1)}$. При выполнении опыта всегда соблюдается условие $P_0 - P_1 \ll P_0$. В таком случае $\gamma = (P_0 - P_1)/(P_2 - P_1)$. Последняя формула справедлива и в том случае, когда γ зависит от температуры.

123. $\gamma = \dfrac{V}{hS}\,\dfrac{T_1^2 - T_2^2}{T_2^2}$.

124. $T - T_0 = \dfrac{mv^2}{2\nu c_v} \approx 28\,000$ К, где ν — число молей;

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)} \approx 1000; \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \approx 10^5.$$

125. Решение. Для упрощения расчета предположим, что через змеевик прошел 1 моль газа. Работа, совершенная газом, равна $A = P_2V_2 - P_1V_1 = R(T_2 - T_1)$. Приращение его внутренней энергии $U_2 - U_1 = C_V (T_2 - T_1)$. Тепло, полученное газом, $Q = U_2 - U_1 + A$. Подставляя сюда выражение для $U_2 - U_1$ и A, найдем, что тепло $Q = (C_V + R)(T_2 - T_1)$, или $Q = C_P (T_2 - T_1)$, так как $C_V + R = C_P$. Отсюда ясно, что в данном опыте измеряют теплоемкость C_P.

126. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Ml_0}{Mg+P_0S}}$. В предельном случае, когда $P_0=0$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$, т. е. период колебаний совпадает с периодом математического маятника длины l_0.

127. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{Ml_0}{Mg+P_0S}}$. Формула верна и в том случае, когда γ зависит от температуры, так как для ее получения используется уравнение адиабаты в дифференциальной форме. В предельном случае, когда $P_0=0$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{l_0}{g}}$.

128. $\tau=\dfrac{2\pi}{S}\sqrt{\dfrac{M}{P_0(\gamma_1/V_1+\gamma_2/V_2)}}$.

129. Решение. При переходе из начального состояния (объем V_1, температура T_1) в конечное (объем V_2, температура T_2) внешнее давление совершает над газом работу $A=P_2(V_1-V_2)$, которая идет на приращение внутренней энергии $U_2-U_1=C_V(T_2-T_1)$. Применяя уравнение Клапейрона $PV=RT$, а также соотношение Роберта Майера $C_P-C_V=R$, после несложных преобразований получим

$$T_2=\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{P_2-P_1}{P_1}\right)T_1.$$

При квазистатическом адиабатическом процессе

$$T_2^{\text{квст}}=T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma 1-)/\gamma}.$$

В первом случае с изменением P_2 температура T_2 меняется линейно, а во втором экспоненциально, причем в бесконечно малой окрестности точки P_1 оба изменения идут одинаково быстро. Отсюда следует, что $T_2^{\text{квст}}>T_2$, если $P_2-P_1>0$, и $T_2^{\text{квст}}<T_2$, если $P_2-P_1<0$. Значит, повышение температуры при внезапном адиабатическом сжатии и понижение при внезапном адиабатическом расширении меньше соответствующих величин при квазистатическом адиабатическом процессе.

130. $P/(\gamma-1)=\sum P_i/(\gamma_i-1)$, где $P=\sum P_i$—давление смеси газов.

131. Решение. Рассмотрим четыре состояния газа:

$$1)\ P_0,\ V_0,\ T_0,\quad 2)\ P_1,\ V,\ T,$$
$$3)\ P_1,\ V_1,\ T_0,\quad 4)\ P_2,\ V_2,\ T_2.$$

Из первого состояния во второе, а также из третьего в четвертое газ переходит адиабатическим сжатием, а потому

$$P_0V_0^\gamma=P_1V^\gamma,\quad P_1V_1^\gamma=P_2V_2^\gamma.$$

В первом и третьем состояниях температуры газа одинаковы. Следовательно, $P_0V_0 = P_1V_1$. Работа двухступенчатого компрессора

$$A = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1}\left\{\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} + \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/2} - 2\right\}.$$

Она имеет минимум при $P = \sqrt{P_0P_2}$. Минимальная работа:

$$A_{\text{мин}} = \frac{2P_0V_0}{\gamma - 1}\left\{\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1\right\}.$$

Работа одноступенчатого компрессора при тех же начальном и конечном давлениях:

$$A_1 = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1}\left\{\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{\gamma-1} - 1\right\}.$$

Следовательно,

$$A_{\text{мин}} = 2A_1\left\{\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} + 1\right\}^{-1}.$$

Для гелия $\gamma = 5/3$, $A_{\text{мин}} = 0{,}515A_1$; для воздуха $\gamma = 7/5$, $A_{\text{мин}} = 0{,}64A_1$.

132. $V_1 = \sqrt{V_0V_2}$,

$$A_1 = \frac{2P_0V_0}{\gamma - 1}\left\{\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{(\gamma-1)/2} + 1\right\}, \quad A_{\text{мин}} = 2A_1\left\{\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{(\gamma-1)/2} + 1\right\}^{-1}.$$

Для аргона $A_{\text{мин}} = 0{,}42A_1$; для азота $A_{\text{мин}} = 0{,}62A_1$.

133. Решение. При механическом равновесии температура T, плотность ρ и давление воздуха P зависят только от высоты z над земной поверхностью, причем $P = C\rho T$, где C от z не зависит. Поэтому при изменении z

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T},$$

откуда для равновесной плотности на высоте $z + dz$ находим

$$\rho(z + dz) = \rho(z) + d\rho = \rho + \frac{\rho}{P}dP - \rho\frac{dT}{T}. \qquad (133.1)$$

Допустим теперь, что в силу каких-либо случайных возмущений некоторая малая масса воздуха переместилась с высоты z на высоту $z + dz$. Давление внутри переместившейся массы будет равно давлению окружающего воздуха, а следовательно, ее плотность изменится. Так как теплопроводность воздуха мала, то процесс может считаться адиабатическим, и следовательно, $P = \text{const}\cdot\rho^\gamma$. Отсюда для изменения плотности $d\rho^*$ переместившейся массы находим:

$$\frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho^*}{\rho},$$

а для самой плотности

$$\rho^*(z + dz) = \rho(z) + d\rho^* = \rho + \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}dP. \qquad (133.2)$$

Допустим, что $dz > 0$ и $\rho^*(z+dz) > \rho(z+dz)$. Тогда сместившаяся масса воздуха, поскольку она тяжелее окружающего воздуха, вернется в исходное положение, т. е. равновесие будет устойчивым. При $dz > 0$ и $\rho^*(z+dz) < \rho(z+dz)$ оно будет неустойчивым. Таким образом, из (133.1) и (133.2) находим условие устойчивости

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}dP \geqslant \frac{\rho}{P}dP - \rho\frac{dT}{T} \quad \text{при} \quad dz > 0. \qquad (133.3)$$

При механическом равновесии

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g. \qquad (133.4)$$

Исключая dP, находим

$$\frac{dT}{dz} \geqslant -\frac{T}{P}\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho g = -\frac{g}{c_P} \approx -0{,}01\ \text{К/м}, \qquad (133.5)$$

где c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Знаку равенства соответствует безразличное равновесие. Соответствующее ему расслоение атмосферы называется адиабатическим. Считая воздух двухатомным газом, имеем по классической теории теплоемкостей $c_P = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$, где μ — средняя относительная молекулярная масса воздуха ($\mu \approx 28{,}8$). Подстановка численных значений дает

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}} = -\frac{2\mu g}{7R} = -9{,}7\cdot 10^{-5}\ \text{К/см} \approx -10^{-2}\ \text{К/м}.$$

Если температура воздуха повышается с высотой, то атмосфера в механическом отношении устойчива. Но устойчивое равновесие возможно и тогда, когда с высотой температура воздуха понижается. Однако это понижение не может превосходить примерно одного градуса на каждые сто метров высоты. Влияние влажности воздуха на адиабатическое расслоение атмосферы исследуется в задаче 588.

134. $$P = P_0(1 - az/T_0)^n, \quad P/T^n = \text{const}, \qquad (134.1)$$

где T_0 — абсолютная температура у земной поверхности, $n = Mg/(Ra)$, R — газовая постоянная, M — относительная молекулярная масса воздуха. В предельном случае, когда $a \to 0$, получается барометрическая формула

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{Mgz}{RT_0}\right\}.$$

Указание. По условию задачи $dT/dz = -a$. Условие равновесия: $dP/dz = -\rho g$. Наконец, на основании уравнения Клапейрона $P = \frac{R}{M}\rho T$. Из этих трех уравнений можно получить формулы, приведенные в ответе.

135. $z = T_0/a$. Для адиабатического расслоения (см. решение задачи 133)

$$z = gT_0/c_P \approx 28 \text{ км}.$$

Из ответа следует, что температурный градиент не может быть одинаковым на всей толще атмосферы.

136. Решение.

$$dQ = dU + P\,dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV.$$

Полагая сначала $V = \text{const}$, а затем $P = \text{const}$, получим

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

откуда

$$C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \qquad (136.1)$$

137. Решение. Как следует из решения предыдущей задачи,

$$dQ = C_V\,dT + \frac{C_P - C_V}{(\partial V/\partial T)_P}\,dV.$$

Для адиабатического процесса $dQ = 0$. Поэтому

$$dT_{\text{ад}} + \frac{\gamma - 1}{(\partial V/\partial T)_P}\,dV_{\text{ад}} = 0.$$

Подставляя сюда

$$dT_{\text{ад}} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV_{\text{ад}} + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP_{\text{ад}},$$

получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{ад}} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Сравнивая это с

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

находим искомый результат.

138. Решение. Очевидно, скорость звука, при прочих равных условиях, тем больше, чем больше сила, стремящаяся вернуть отклоненную частицу воздуха в положение равновесия. Значит, скорость звука увеличится, если, при прочих равных условиях, увеличится разность давлений в местах сжатия и разрежения. Повышение температуры в месте сжатия увеличивает давление воздуха, понижение температуры в месте разрежения уменьшает давление. Как то, так и другое ведет к увеличению разности между давлениями в местах сжатия и разрежения, а следовательно, к увеличению скорости звука в газе.

140. $\dfrac{dv}{dT} = \dfrac{v}{2T}$.

141. $\Delta v \approx \frac{v}{2T}\Delta T \approx 0{,}61$ м/с.

142. $v = 1260$ м/с.

143. $v = 970$ м/с.

144. $\gamma = 1{,}41$.

145. $v/v_1 = 4{,}86$.

146. Решение. Рассматривая внутреннюю энергию U как функцию P и V, напишем

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP.$$

Считая же ее функцией T и P, получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V.$$

Введем энтальпию $I = U + PV$. Тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial (I - PV)}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_P - P.$$

Далее,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P.$$

Следовательно,

$$dU = \left[C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - P\right] dV + C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP.$$

Так как dU — полный дифференциал, то

$$\frac{\partial}{\partial P}\left[C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - P\right] = \frac{\partial}{\partial V}\left[C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V\right].$$

Выполнив дифференцирование, получим требуемое соотношение.

147. $C_P - C_V = R + V\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_P - P\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_V.$

148. $T_2 = T_1 (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 177$ К,

$$v = \sqrt{2c_P T_1 [1 - (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma}]} = 460 \text{ м/с}.$$

149. $T_2 = T_1 - \mu v^2/(2C_P) = 194$ К; $P_1 = P_2 (T_1/T_2)^{\gamma/(\gamma-1)} = 3{,}3$ атм, где μ — относительная молекулярная масса, C_P — молярная теплоемкость, P_2 — атмосферное давление.

150. $v = \sqrt{2C_P T/\mu}$. Указанная максимальная скорость достигается при адиабатическом истечении газа в вакуум (или практически, когда $P/P_0 \gg 1$, где P — давление газа в баллоне, а P_0 — наружное давление).

151. $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/4} \approx 400$ К, $v = \sqrt{\frac{8RT_1}{\mu}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right]^{1/4}} \approx$ ≈ 860 м/с.

152. $M_0/M = e^{v/v_0} \approx 22$, где $v_0 = \sqrt{2C_P T/\mu} \approx 2{,}58$ км/с.

153. Решение. В системе отсчета, в которой тело покоится, течение газа можно считать стационарным. Уравнение Бернулли в этой системе запишем в виде $c_P T + v^2/2 = \text{const}$. Температура максимальна в точке, где $v = 0$. Она равна

$$T_{\text{макс}} = T\left(1 + \frac{v^2}{2Tc_P}\right),$$

или

$$T_{\text{макс}} = T\left[1 + \frac{1}{2}\text{M}^2(\gamma - 1)\right],$$

где $\text{M} \equiv v/c_{\text{зв}}$ — число Маха ($c_{\text{зв}}$ — скорость звука).

154. Решение. Тепло, полученное газом при адиабатическом расширении или сжатии, равно нулю. Работа, совершенная газом, $A = P_2\,\Delta V$, поэтому $\Delta U + P_2\Delta V = 0$. Так как $U = C_V T$, то отсюда находим

$$C_V(T_2 - T\ ) + P_2(V_2 - V_1) = 0,$$

или

$$C_V(T_2 - T_1) + RT_2 = P_2V_1.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{C_V T_1 + P_2 V_1}{C_P}, \quad V_2 = \frac{RT_2}{P_2}.$$

155. Решение. Используя решение предыдущей задачи, находим

$$T_3 = \frac{C_V T_2 + P_1 V_2}{C_P}, \quad V_3 = \frac{RT_3}{P_1}.$$

С помощью уравнения Клапейрона $PV = RT$ и соотношения Роберта Майера $C_P - C_V = R$ выражение для T_3 нетрудно преобразовать к виду

$$T_3 = T_1 + \frac{C_V}{C_P^2}\,\frac{V_1(P_2 - P_1)^2}{P_2}.$$

Отсюда видно, что в результате обоих адиабатических процессов температура, а с ней и объем газа всегда возрастают. Если давление меняется бесконечно мало, то из полученных формул следует, что температура и объем меняются на бесконечно малые величины второго порядка. В первом порядке они остаются неизменными.

§ 4. Второе начало термодинамики

157. Если процесс круговой, то заимствованная из теплового резервуара теплота не может быть целиком превращена в работу, так как это противоречит второму принципу термодинамики. Если же процесс не круговой, то полное превращение теплоты в работу возможно. Например, если идеальный газ находится в тепловом контакте с тепловым резервуаром и подвергается изотермическому расширению, совершая работу против внешних сил, то при этом его внутренняя энергия остается

неизменной, так как она зависит не от объема, а только от температуры. Поэтому вся теплота, заимствованная газом из теплового резервуара, должна превращаться в работу.

159. Выгоднее понижать температуру холодильника.

160. $Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A = 15$ кДж.

161. $Q_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 3110$ Дж,

$Q_2 = \frac{RT_2}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 2330$ Дж,

$A = Q_1 - Q_2 = 780$ Дж.

162. $A = Q_2 (T_1 - T_2)/T_2 = 418$ Дж.

163. $\eta = (T_1 - T_2) \left(T_1 + \frac{C_P}{R} \frac{T_1 - T_2}{\ln (P_1/P_2)} \right)^{-1}$, где $T_1 > T_2, P_1 > P_2$.

164. $\eta = \frac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2) \ln (V_1/V_2)}{(\gamma - 1) T_1 \ln (V_1/V_2) + (T_1 - T_2)}$, где $\gamma = C_P/C_V$.

165. $A_{12} = R(T_2 - T_1)$, $Q_{12} = C_P (T_2 - T_1)$,

$A_{23} = 0$, $Q_{23} = C_V (T_3 - T_2) < 0$,

$A_{31} = C_V (T_3 - T_1)$, $Q_{31} = 0$,

$\eta = 1 - \frac{T_2 - T_3}{\gamma (T_2 - T_1)}$.

166. $A_{12} = R(T_2 - T_1)$, $Q_{12} = C_P (T_2 - T_1)$,

$A_{23} = 0$, $Q_{23} = C_V (T_1 - T_2) < 0$,

$A_{31} = Q_{31} = RT_1 \ln (V_1/V_2) = RT_1 \ln (T_1/T_2) < 0$,

$\eta = \frac{R(T_2 - T_1) + RT_1 \ln (T_1/T_2)}{C_P (T_2 - T_1)}$.

167. $Q_{12} = C_V (T_2 - T_1)$, $Q_{23} = 0$,

$Q_{31} = C_V T_1 \ln (T_2/T_1)$, $\eta = 1 - (T_1/T_2) \ln (T_2/T_1)$.

168. $Q_{31} = RT_1 \ln (T_1/T_2)$, $Q_{23} = C_V (T_1 - T_2)$,

$Q_{12} = C_P (T_2 - T_1)$, $\eta = 1 - \frac{C_P (T_1 - T_2)}{RT_1 \ln (T_1/T_2) + C_V (T_1 - T_2)}$.

169. $Q_{12} = C_P (T_2 - T_1)$, $Q_{23} = 0$,

$Q_{31} = C_P T_1 \ln (T_1/T_2)$, $\eta = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \ln (T_1/T_2)}$.

170. $Q_{12} = \frac{C_P + C_V}{2} (T_2 - T_1)$,

$Q_{23} = C_V (\sqrt{T_1 T_2} - T_2)$, $Q_{31} = C_V (T_1 - \sqrt{T_1 T_2})$,

$\eta = 1 - 2 \frac{C_P + C_V (T_1 - T_2)}{C_V (\sqrt{T_1 T_2} - T_2) + C_P (T_1 - \sqrt{T_1 T_2})}$.

171. $\eta = 1 - \frac{\gamma T_3\,[(T_1/T_3)^{1/\gamma} - 1]}{T_1 - T_3}$.

172. $\eta = 1 - (T_2/T_1)$.

173. $A_{12} = Q_{12} = RT_1 \ln (V_2/V_1)$,

$A_{23} = (C_V - C_0)(T_1 - T_2)$, $Q_{23} = C_0 (T_2 - T_1)$,

$A_{34} = Q_{34} = -RT_2 \ln (V_3/V_4)$,

$A_{41} = (C_V - C_0)(T_2 - T_1)$, $Q_{41} = C_0 (T_1 - T_2)$,

$$\eta = \frac{R (T_1 - T_2) \ln (V_2/V_1)}{RT_1 \ln (V_2/V_1) + C_0 (T_2 - T_1)}.$$

174. $\eta = \frac{R (T_1 - T_2) \ln (V_2/V_1)}{RT_1 \ln (V_2/V_1) + C_V (T_1 - T_2)}$.

175. Решение. Возьмем на диаграмме P, V (рис. 37) две бесконечно близкие изотермы *12* и *34* и две бесконечно близкие адиабаты *23* и *41* и применим к циклу *1234* теорему Карно. Тепло Q_1, полученное системой на изотерме *12*, равно $Q_1 = A_1 + \Delta U$, где $A_1 = P\Delta V$ — работа, совершенная системой на изотерме *12*, а $\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V$ — изменение внутренней энергии на той же изотерме. Работа цикла изобразится площадью *1234*. С точностью до величин высшего порядка малости при вычислении этой площади фигуру *1234* можно заменить параллелограммом. Его площадь, очевидно, равна площади параллелограмма *1256*, т. е. $A = \Delta P \cdot \Delta V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T\, \Delta V$, где $\Delta T = T_1 - T_2$. По теореме Карно $A/Q_1 = \Delta T/T_1$. Подставляя сюда выражения для A и Q_1, получим первую из формул, которые надо доказать. Вторая формула получается из первой дифференцированием по T при постоянном V. (См. также решение задачи 228.)

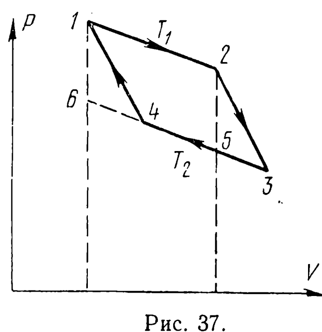


Рис. 37.

176. Решение. Перепишем первое начало термодинамики $\delta Q = dU + PdV$ в виде $\delta Q = dI - V\,dP$. Затем возьмем на диаграмме P, V (рис. 37) две бесконечно близкие изотермы *12* и *34* и две бесконечно близкие адиабаты *23* и *41* и применим к циклу *1234* теорему Карно. Тепло Q_1, полученное системой на изотерме *12*, равно

$$Q_1 = I_2 - I_1 - V (P_2 - P_1).$$

Так как изменение энтальпии $I_2 - I_1$ происходит по изотерме, то

$$Q_1 = \left[\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T - V\right](P_2 - P_1).$$

Работа цикла A изобразится площадью *1234*. С точностью до бесконечно малых высшего порядка фигура *1234* может считаться параллелограммом. Площадь этого параллелограмма равна площади параллелограмма *1256*. Последняя в свою очередь равна длине основания *61*, умноженной на высоту (V_2-V_1). Поскольку точкам *1* и *6* соответствуют одинаковые объемы, но разные температуры, длина основания *61* равна $\partial P/\partial T_V\ (T_1-T_2)$. Поэтому для работы цикла получаем

$$A=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1-T_2)(V_2-V_1),$$

или, воспользовавшись тождеством $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$:

$$A=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1-T_2)(P_2-P_1).$$

По теореме Карно $A/Q_1=(T_1-T_2)/T_1$. Подставляя сюда значения для A и Q_1, получим первую из доказываемых формул. Вторая получается из первой дифференцированием по P, так как $C_P=\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P$. (См. также решение задачи 228.)

179. $P=A(V)T+B(V)$, где $A(V)$ и $B(V)$ — произвольные функции объема.

180. $V=A(P)T+B(P)$, где $A(P)$ и $B(P)$ — произвольные функции давления.

181. $\left(\frac{1}{2}bP^2+\frac{2}{3}cP^3\right)=332$ Дж,

$$\Delta U=-T\int_0^P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)dP+A=A-\frac{1}{2}\beta TP^2=120 \text{ Дж}.$$

182. $$C_P-C_V=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=$$
$$=-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

183.

$$c_P-c_v=KT\alpha^2/\rho. \qquad (183.1)$$

184. Для воды $c_P-c_v=2$ Дж/(кг·К) $=5\cdot10^{-4}$ ккал/(кг·К). Столь ничтожная разница удельных теплоемкостей c_P и c_v для воды объясняется малостью температурного коэффициента расширения α, обусловленной тем, что коэффициент α при 4° С обращается в минимум $\alpha=0$. Для ртути $c_P-c_v=17$ Дж/(кг·К), $c_v=123$ Дж/(кг·К) $\approx0{,}0292$ ккал/(кг·К), $c_P/c_v=1{,}13$.

185. Решение. Из формулы (136.1) получаем для разности удельных теплоемкостей

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+P=\frac{\rho}{\alpha}(c_P-c_v).$$

После подстановки численных данных получаем для воды

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \approx -0{,}33\cdot 10^8\ \text{Па} \approx 0{,}33\cdot 10^3\ \text{атм},$$

а для ртути

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \approx 1{,}28\cdot 10^9\ \text{Па} \approx 1{,}3\cdot 10^4\ \text{атм}.$$

Следовательно, при обычных условиях величина $(\partial U/\partial V)_T$ в тысячи и десятки тысяч раз превосходит атмосферное давление. Отсюда следует, что для жидких и твердых тел разность $c_P - c_v$ обусловлена главным образом работой, которая идет на изменение внутренней энергии тела при его расширении или сжатии при постоянном давлении. Работа против внешнего давления практически не играет никакой роли. Для газов положение обратное: здесь разность $c_P - c_v$ обусловлена почти исключительно работой против постоянного внешнего давления P.

186. См. ответ к задаче 182.

187. 1) Охладится. 2) Нагреется. Ответ следует из тождества $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, если учесть условия стабильности физически однородного и изотропного вещества (см. предыдущую задачу).

188. Решение. Запишем неравенство Клаузиуса в виде

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_1} - \int \frac{\delta Q_2}{T_2} \leqslant 0,$$

где δQ_1 — элементарное тепло, получаемое машиной в круговом процессе от нагревателей, а δQ_2 — элементарное тепло, отдаваемое холодильникам. (Величины δQ_1 и δQ_2 существенно положительны.) Если вместо T_1 поставить максимальную, а вместо T_2 — минимальную температуру, то неравенство только усилится. Значит,

$$\frac{1}{T_{\text{макс}}} \int \delta Q_1 - \frac{1}{T_{\text{мин}}} \int \delta Q_2 \leqslant 0,$$

или

$$\frac{Q_1}{T_{\text{макс}}} - \frac{Q_2}{T_{\text{мин}}} \leqslant 0,$$

где Q_1 — полное количество тепла, полученное машиной от нагревателей, а Q_2 — полное количество тепла, отданное холодильникам. Из полученного неравенства следует

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}},$$

что и требовалось доказать.

189. Решение. Максимальная работа получится тогда, когда машина работает последовательно повторяющимися бесконечно малыми циклами Карно. Пусть в результате одного из таких циклов первое

тело отдало тепло $\delta Q_1 = -C_1 dT_1$, а второе $\delta Q_2 = -C_2 dT_2$ (T_1 и T_2 означают переменные температуры тел). Произведенная работа равна $\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2$, причем

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0,$$

или

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

Интегрируя это соотношение с учетом начальных условий, получим

$$T_1^{C_1} T_2^{C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}.$$

Окончательная температура T найдется из условия $T_1 = T_2 = T$. Оно дает

$$T^{C_1 + C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}. \qquad (189.1)$$

Максимальная работа, которую может совершить система,

$$A = \int \delta A = -C_1 \int_{T_{10}}^{T} dT - C_2 \int_{T_{20}}^{T} dT = (C_1 T_{10} + C_2 T_{20}) - (C_1 + C_2) T. \qquad (189.2)$$

Она равна убыли внутренней энергии системы.

190. Решение. Записав (189.1) в виде

$$T^{1 + C_1/C_2} = T_{20} T_{10}^{C_1/C_2},$$

в пределе $C_2 \to \infty$ получим $T = T_{20}$. Этот результат непосредственно очевиден, поскольку $C_2 = \infty$. Элементарная работа

$$\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2 = (1 - T_2/T_1)\, \delta Q_1 = -C_1 (1 - T_{20}/T_1)\, dT_1.$$

Отсюда интегрированием находим

$$A = C_1 [T_{10} - T_{20} - T_{20} \ln (T_{10}/T_{20})].$$

Работа A меньше убыли внутренней энергии нагретого тела $C_1 (T_{10} - T_{20})$. Часть внутренней энергии тело передает окружающей среде в виде тепла.

191. $T = T_{10}$, $A = C_2 [T_{20} - T_{10} + T_{10} \ln (T_{10}/T_{20})]$. Нетрудно проверить, что $A > 0$.

192. Решение. Тепло, отдаваемое двигателем при его работе воде отопительной системы (холодильнику), равно

$$Q' = q \frac{T_2}{T_1}.$$

Работа двигателя

$$A = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

расходуется на приведение в действие холодильной машины. Последняя берет от холодильника (грунтовая вода) тепло Q_3 и передает нагревателю (вода отопительной системы) тепло Q''. При этом

$$Q''=\frac{T_2}{T_3}Q_3, \quad Q''-Q_3=Q''\frac{T_2-T_3}{T_2}=A,$$

$$Q''=A\frac{T_2}{T_2-T_3}=q\frac{T_1-T_3}{T_1}\frac{T_2}{T_2-T_3}.$$

Полное количество тепла, получаемое отапливаемым помещением, равно

$$Q=Q'+Q''=q\frac{T_2(T_1-T_3)}{T_1(T_2-T_3)}\approx 20\,000 \text{ ккал/кг}.$$

График зависимости величины Q/q от температуры в отопительной системе приведен на рис. 38.

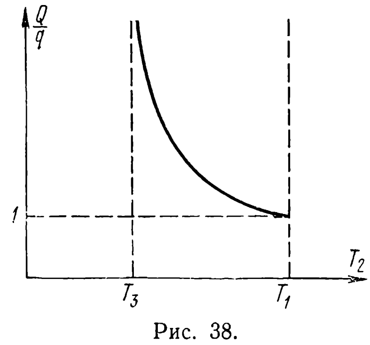


Рис. 38.

Другой (более общий) метод решения задачи основан на неравенстве Клаузиуса (см. следующую задачу).

193. Решение. Обе машины — двигатель и холодильная машина — совершили круговой процесс, в результате которого нагреватель отдал тепло Q_1, холодильник отдал тепло Q_3, природный резервуар воды при работе двигателя получил тепло Q_2, природный резервуар воды при работе холодильной машины получил тепло Q_2'. На основании неравенства Клаузиуса

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_3}{T_3}-\frac{Q_2+Q_2'}{T}\leqslant 0.$$

Работа двигателя Q_1-Q_2 должна быть не меньше работы, потребной для приведения в действие холодильной машины $Q'-Q_3$, т. е. $Q_1-Q_2\geqslant Q_2'-Q_3$, откуда

$$Q_2+Q_2'\leqslant Q_1+Q_3.$$

Если в неравенстве Клаузиуса Q_2+Q_2' заменить на бóльшую величину Q_1+Q_3, то от этого неравенство только усилится. Таким образом, должно быть

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_3}{T_3}-\frac{Q_1+Q_3}{T_2}\leqslant 0,$$

откуда

$$Q_1\geqslant\frac{1/T_2-1/T_1}{1/T_3-1/T_2}Q_2,$$

или

$$Q_1 \geqslant \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \frac{T_3}{T_1} Q_1 = 364 \text{ Вт}.$$

Равенство относится к идеальным машинам, работающим по циклу Карно. Для реальных машин надо брать знак неравенства.

194. Решение. Допустив противоположное, предположим, что A и B — две соседние точки, в которых политропа пересекается с изотермой (рис. 39). Применим к циклу $ACBDA$ равенство Клаузиуса. На политропе ADB теплоемкость C постоянна, а потому

$$\int\limits_{ADB} \frac{\delta Q}{T} = C \int\limits_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = 0.$$

(Интеграл обращается в нуль, так как $T_A = T_B$, поскольку точки A и B лежат на изотерме.) На изотерме ACB

$$\int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{Q}{T}.$$

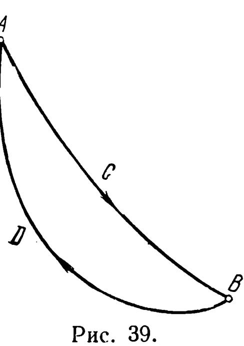


Рис. 39.

Таким образом, равенство Клаузиуса сводится к $Q = 0$, где Q — тепло, полученное системой. Но для кругового процесса $Q = A$. Значит, площадь цикла $ACBDA$ равна нулю, что может быть тогда и только тогда, когда между точками A и B политропа и изотерма пересекаются между собой. Это противоречит предположению, что A и B — соседние точки пересечения политропы с изотермой.

196. Решение. Применив к рассматриваемому циклу равенство Клаузиуса, получим

$$(C_P - C_V) \ln (T_2 T_4 / T_1 T_3) = 0,$$

откуда и следует требуемое соотношение, так как $C_P - C_V \neq 0$.

198. $A = C [T_1 \ln (T_1/T_3) - (T_1 - T_3)]$.

199. $A = \frac{T_1 - T_2}{T_1} Q_1$.

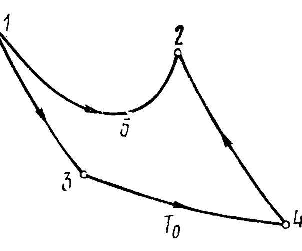


Рис. 40.

200. Решение. Пусть *1342* схематически изображает первый переход, а *152* — второй (рис. 40). Применяя к ним равенство Клаузиуса и учитывая, что на адиабатах *13* и *42* система тепла не получает, напишем

$$\int\limits_{152} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1342} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0},$$

где Q_0 — тепло, полученное на изотерме *34*. По условию $T > T_0$ и $\delta Q > 0$, а потому

$$\int\limits_{152} \frac{\delta Q}{T} < \int\limits_{152} \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{Q}{T_0},$$

где Q — тепло, полученное на пути *152*. Комбинируя последнее неравенство с предыдущим равенством, получаем $Q > Q_0$.

203. Решение. Пусть во всех точках изотермы $(\partial V/\partial T)_P = 0$. Тогда из (29.2) следует, что $(\partial P/\partial T)_V = 0$. На изотерме ввиду соотношения (175.1)

$$dU = \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right] dV = -P\,dV,$$

а потому $\delta Q = dU + P\,dV = 0$. Значит, изотерма во всех точках должна совпадать с адиабатой.

204. 1) Если бы коэффициент теплового расширения обращался в нуль на всем протяжении изотермы, то она совпадала бы с адиабатой, и цикл Карно между температурой 4 °C и какой-либо другой температурой осуществить было бы нельзя. 2) На самом деле для воды коэффициент теплового расширения обращается в нуль только в одной точке изотермы, так что условия задачи осуществить нельзя.

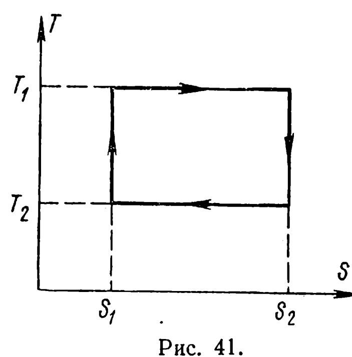


Рис. 41.

205. См. рис. 41. Работа и количество тепла численно равны площади цикла.

206. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{2T_1}$, $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}$.

207. $\Delta S = mc \ln (T_2/T_1)$, где m — масса вещества.

208. $\Delta S = C_P \ln \dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T}$, где C_P — теплоемкость одного тела.

209. $S = \nu\,[C_V \ln T + R \ln (V/\nu) + \text{const}]$, где аддитивная постоянная в скобках не зависит от числа частиц газа.

210. $S_2 - S_1 = C_V \ln (T_2/T_1) = C_V \ln (P_2/P_1)$ при $V = \text{const}$,
$S_2 - S_1 = R \ln (V_2/V_1) = R \ln (P_1/P_2)$ при $T = \text{const}$,
$S_2 - S_1 = C_P \ln (T_2/T_1) = C_P \ln (V_2/V_1)$ при $P = \text{const}$.

211. $\Delta S = R\,\dfrac{M}{\mu} \ln \dfrac{V_2}{V_1}$, где μ — относительная молекулярная масса газа.

212. $\Delta U = U_2 - U_1 = \dfrac{PV^n}{\gamma - 1}\left(\dfrac{1}{V_2^{n-1}} - \dfrac{1}{V_1^{n-1}}\right)$,

$\Delta S = S_2 - S_1 = (nC_V - C_P) \ln (V_1/V_2)$,

где $\gamma = C_p/C_V$. Для изотермического процесса:

$$\Delta U = 0, \ \Delta S = R \ln (V_2/V_1),$$

для адиабатического процесса:

$$\Delta U = \frac{pV^\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right), \quad \Delta S = 0.$$

213. $\Delta U = -{}^3/_2 P_1 V_1 (1 - V_1^2/V_2^2) = -625$ кал/моль,

$\Delta S = -2R \ln (V_2/V_1) \approx -4$ кал/(моль·°C),

$Q = -P_1 V_1 (1 - V_1^2/V_2^2) \approx -417$ кал/моль.

Система не поглощает, а отдает тепло.

214. $\Delta U = \frac{5}{2} P_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = -117$ кал.

$Q = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = -70$ кал.

$\Delta S = -\frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -0{,}20$ кал/К.

215. $\Delta S = 4{,}56$ кал/°C.

216. $\Delta S = R \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right) \ln 2.$

217. $$S_2 - S_1 = \frac{R}{2} (5\nu_1 + 3\nu_2) \ln \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} - \frac{R}{2} (5\nu_1 \ln T_1 + 3\nu_2 \ln T_2) + R (\nu_1 + \nu_2) \ln 2 = 0{,}16 \text{ кал/°C},$$

где $\nu_1 = 0{,}0402$ — число молей водорода, $\nu_2 = 0{,}0948$ — число молей гелия.

218. $\Delta U = U - U_0 = \frac{M}{\mu} C_V T_0 (2^{\gamma-1} - 1),$

$\Delta S = S - S_0 = \frac{M}{\mu} C_V (\gamma - 1) \ln 2,$

где $\gamma = C_p/C_V$.

219. $\Delta S = 63$ кал/°C.

220. $\Delta S = 3{,}2$ кал/°C.

221. $s = c_p \ln T + \frac{q(T)}{T} \xi + \text{const}$, где c_p — удельная теплоемкость жидкости, $q(T)$ — удельная теплота парообразования при температуре T, ξ — отношение массы пара ко всей массе системы.

222. Решение. Тела A и B могут обмениваться внутренней энергией путем теплообмена и производить работу друг над другом. Так как они помещены в жесткую адиабатическую оболочку, то изменения их внутренних энергий в элементарном процессе связаны соотношением $dU_A = -dU_B$. В силу равенства действия и противодействия $\delta A_A = -\delta A_B$, где δA_A — работа тела A над телом B,

а δA_B — работа тела B над телом A. Следовательно,

$$(dU+\delta A)_A = -(dU+\delta A)_B,$$

или

$$\delta Q_A = -\delta Q_B.$$

Количество тепла, полученное телом A, равно количеству тепла, отданного телом B. Согласно постулату Клаузиуса в системе самопроизвольно могут проходить лишь такие процессы, в которых тепло переходит от тела, более нагретого, к телу, менее нагретому. Отсюда следует

$$\delta Q_A < 0, \quad \delta Q_B > 0,$$

так как $T_A > T_B$. Применяя к каждому из тел A и B неравенство Клаузиуса, получим

$$\Delta S_A \geqslant \int \frac{\delta Q_A}{T_A}, \quad \Delta S_B \geqslant \int \frac{\delta Q_B}{T_B}.$$

Складывая эти неравенства и принимая во внимание, что $S_A + S_B = S$, найдем

$$\Delta S \geqslant \int \left(\frac{\delta Q_A}{T_A} + \frac{\delta Q_B}{T_B}\right) = \int \delta Q_B \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right) > 0.$$

223. $S_2 - S_1 = \frac{A}{T} - \nu C_V \frac{T_1 - T}{T} = 13$ Дж/К.

224. $S_2 - S_1 = \nu\,[C_V \ln (T_2/T_1) + R \ln (V_2/V_1)]$, где

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \approx 1{,}1.$$

После подстановки $C_V = {}^5/_2\, R$, $V_2/V_1 = n$:

$$S_2 - S_1 = \nu R\,({}^5/_2 \ln (T_2/T_1) + \ln n) = 1{,}8 \text{ кал/°C}.$$

228. Решение. Рассмотрим бесконечно малый квазистатический изотермический процесс. Поделив соотношение $TdS = dU + PdV$ на dV, найдем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P,$$

или на основании третьего соотношения (227.1)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \tag{228.1}$$

Аналогично находим для энтальпии

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \tag{228.2}$$

230. Условие полного дифференциала для δA приводит к соотношению $(\partial P/\partial T)_V = 0$. Независимость работы A от пути интегрирования

при наличии этого соотношения следует уже из того, что P не зависит от T, а является функцией только объема: $P = P(V)$.

231. Решение.

$$C_P - C_V = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right],$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T.$$

Используя третье соотношение (227.1), находим

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

232. Решение.

$$dU = T\,dS - P\,dV, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P.$$

Величины S, V, T связаны функциональным соотношением $f(S, V, T) = 0$. Из него следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T.$$

После соответствующей подстановки получается первое соотношение Аналогично доказывается второе соотношение.

233. Решение.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial(U, T)}{\partial(V, T)} = \frac{\partial(U, T)}{\partial(P, T)}\frac{\partial(P, T)}{\partial(V, T)} = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение.

235. Решение.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{\partial(P, S)}{\partial(V, S)} = \frac{\partial(P, S)}{\partial(P, T)}\frac{\partial(P, T)}{\partial(V, T)}\frac{\partial(V, T)}{\partial(V, S)} =$$

$$= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V = \frac{(\delta Q/\partial T)_P}{(\delta Q/\partial T)_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.$$

237. См. предыдущую задачу. Принять во внимание, что для устойчивости физически однородного вещества должны выполняться условия: $C_P > 0$, $C_V > 0$, $(\partial P/\partial V)_T < 0$.

239.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} = \frac{\partial(T, S)}{\partial(T, V)}\frac{\partial(T, V)}{\partial(V, S)} =$$

$$= -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

Так же доказывается и другое соотношение.

240. Решение. Пусть l, τ, T, S — длина, натяжение, температура и энтропия жгута. Из этих четырех величин независимы только две,

стальные являются их функциями. Поэтому тождественно

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l = -1. \qquad (240.1)$$

Из первого начала, записанного в виде $d(U-TS) = -S\,dT + \tau\,dl$, следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_l \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_l.$$

Далее, так как T, τ, l связаны функциональным соотношением, то тождественно

$$\left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau.$$

Подставляя это в (240.1), получим

$$\frac{C_l}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau = -1,$$

где $C_l = T\,(\partial S/\partial T)_l$ — теплоемкость при постоянной длине. Она положительна для всех тел: $C_l > 0$. Величина $(\partial l/\partial \tau)_T$ также положительна для всех тел. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau < 0.$$

По условию задачи для резинового жгута $(\partial l/\partial T)_\tau < 0$, а поэтому $(\partial T/\partial l)_S > 0$. Отсюда следует, что жгут нагреется, если его адиабатически удлинить.

241. Решение. Рассуждая, как при выводе формулы (175.1), находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T = \tau - T\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_l = 0.$$

При вычислении энтропии используем соотношение Максвелла $(\partial S/\partial l)_T = -(\partial \tau/\partial T)_l$ и получаем $dS = -A\,dl + C_l\,dT/T$. При изотермическом растяжении шнура $dS = -A\,dl < 0$.

243. Решение. При обратимом адиабатическом расширении остается постоянной энтропия газа S. Рассматривая ее как функцию температуры и давления, можно написать для элементарного обратимого процесса расширения:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \Delta P = 0.$$

Очевидно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{T\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T}.$$

Кроме того, согласно (227.1),

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Поэтому

$$\frac{C_P}{T}\Delta T-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\Delta P=0.$$

Отсюда для бесконечно малого процесса

$$\frac{\Delta T}{\Delta P}=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S=\frac{T\,(\partial V/\partial T)_P}{C_P}. \qquad (243.1)$$

Для конечного процесса

$$T_2-T_1=\int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP.$$

244. $\Delta T=\frac{\alpha T}{\rho c_P}\Delta P=0{,}038$ °C.

245. $\Delta T=\frac{\alpha T}{\rho c_P}\Delta P=-0{,}26$ °C.

249. $\Delta T=-\frac{F\beta}{c\rho\,(\pi r^2)^2}T=-0{,}95$ К.

250. Решение. Для элементарного процесса $TdS\geqslant\delta Q=dU+\delta A$. При изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа U не меняется. Следовательно, $\delta A\leqslant TdS$. Отсюда

$$A\leqslant T\,(S_2-S_1)=RT\left(\nu_1\ln\frac{V_1+V_2}{V_1}+\nu_2\ln\frac{V_1+V_2}{V_2}\right)=$$

$$=\nu RT\ln\frac{(V_1+V_2)^2}{V_1V_2}=1{,}8\ \text{кДж}.$$

251. Решение. Начальное и конечное состояния равновесны, тепло не подводится. Поэтому $A=U_1-U_2$, где U_1 и U_2 — начальное и конечное значения внутренней энергии системы. Объем системы V_1+V_2 фиксирован. Поэтому в конечном состоянии внутренняя энергия есть функция только энтропии: $U_2=U\,(S_2)$. Так как $(\partial U/\partial S)_V=T>0$, то энергия U_2 будет минимальна, когда энтропия S_2 также минимальна. Но в адиабатическом процессе энтропия не убывает. Следовательно, $S_{2\,\text{мин}}\geqslant S_1$. Максимальная работа получится в том случае, когда энтропия остается постоянной. Из условия равенства энтропий

$$\nu_1\,(C_V\ln T_1+R\ln V_1)+\nu_2\,(C_V\ln T_1+R\ln V_2)=$$

$$=(\nu_1+\nu_2)\,[C_V\ln T_2+R\ln\,(V_1+V_2)]$$

найдем температуру T_2 в конце процесса. Подставляя в это условие $C_V={}^5/_2R$, $\nu_1=\nu_2$, получим

$$T_2=T_1\left[\frac{V_1V_2}{(V_1+V_2)^2}\right]^{1/5}=0{,}754\,T_1=226\ \text{К}.$$

Максимальная работа

$$A_{\text{макс}}=(\nu_1+\nu_2)\,C_V\,(T_1-T_2)=1{,}55\ \text{кДж}.$$

252. Решение. Будем рассматривать энтальпию газа I как функцию температуры T и давления P. Если разность начального и конечного давлений $P_1 - P_2$ мала (дифференциальный эффект Джоуля—Томсона), то условие $I = \text{const}$ запишем в виде

$$\Delta I = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P \Delta T + \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T \Delta P = 0.$$

А так как

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P = C_P, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

то

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{T(\partial V/\partial T)_P - V}{C_P}. \tag{252.1}$$

С помощью тождества (29.2) эту формулу нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = -\frac{T(\partial P/\partial T)_V + V(\partial P/\partial V)_T}{C_P(\partial P/\partial V)_T}. \tag{252.2}$$

Если разность давлений $P_1 - P_2$ не мала (интегральный эффект Джоуля—Томсона), то при вычислении изменения температуры $T_2 - T_1$ реальный неравновесный процесс можно заменить квазистатическим процессом, происходящим при постоянной энтальпии. Это можно делать потому, что начальное и конечное состояния полностью определяются заданием давления и энтальпии, которые фиксированы, а потому при вычислении $T_2 - T_1$ безразлично, как переходит система из начального состояния в конечное. Заменив реальный процесс последовательностью бесконечно малых процессов Джоуля—Томсона, можно написать для изменения температуры

$$T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{T(\partial V/\partial T)_P - V}{C_P}\, dP. \tag{252.3}$$

254. Результат получается сравнением формул (252.1) и (243.1).

255. Решение. Для вычисления изменения энтропии газа заменим реальный процесс Джоуля—Томсона квазистатическим изэнтальпическим процессом, переводящим систему в то же конечное состояние. Для такого процесса $dI = TdS + VdP = 0$, а потому

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_I = -\frac{V}{T} < 0.$$

Так как давление в процессе Джоуля—Томсона понижается, то из полученного неравенства следует, что энтропия возрастает.

256. Решение. Так как над газом не производится работа и тепло не подводится, то после удаления перегородки и установления равновесия внутренняя энергия газа не изменится. Реальный

процесс, совершаемый газом, является неравновесным и очень сложным. Однако начальное и конечное состояния равновесны, а температура газа в равновесном состоянии определяется двумя параметрами, за которые удобно взять внутреннюю энергию и объем газа. При вычислении изменения температуры реальный процесс можно заменить квазистатическим процессом при постоянной внутренней энергии. Для такого процесса

$$T_2-T_1=\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U dV.$$

Для вычисления частной производной, входящей в этот интеграл, надо дифференциал

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

положить равным нулю. Если еще воспользоваться первой формулой (175.1), то получится

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U=-\frac{P-T\,(\partial P/\partial T)_V}{C_V}.$$

Окончательно

$$T_2-T_1=\int_{V_1}^{V_2}\frac{P-T\,(\partial P/\partial T)_V}{C_V}\,dV.$$

Для идеального газа эта формула дает $T_2-T_1=0$.

257. Решение. В состоянии механического равновесия температура T, удельный объем v и давление P жидкости являются функциями только высоты z над земной поверхностью. Пусть dv, dT, dP означают бесконечно малые приращения v, T, P в покоящейся жидкости при изменении высоты на dz. В силу уравнения состояния эти величины связаны соотношением

$$dv=\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT+\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP. \qquad (257.1)$$

Допустим теперь, что под действием какого-то бесконечно малого возмущения элемент жидкости переместился вверх на dz. Такое перемещение происходит в отсутствие теплообмена, т. е. адиабатически, а потому для него можно написать

$$dv_{\text{ад}}=\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT_{\text{ад}}+\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP. \qquad (257.2)$$

Здесь $dT_{\text{ад}}$ и dP означают приращения температуры и давления внутри рассматриваемого элемента жидкости при адиабатическом поднятии его на высоту dz. (Значок «ад» у dP мы опустили, так как приращение давления в элементе жидкости — такое же, что и приращение

давления в окружающей жидкости.) Если $dz > 0$, т. е. элемент жидкости сместился действительно вверх, и $dv_{\text{ад}} > dv$, то сместившийся элемент окажется относительно более легким, чем окружающая жидкость. Он будет подниматься еще выше, и равновесие жидкости окажется неустойчивым. В противоположном случае, когда $dv_{\text{ад}} < dv$, давление окружающей жидкости вернет элемент в исходное положение, т. е. равновесие будет устойчивым. Воспользовавшись выражениями (257.1) и (257.2) и поделив неравенство на положительную величину dz, условие устойчивости равновесия можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}} < \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dz}. \tag{257.3}$$

Требование $dz > 0$, использованное при выводе, теперь можно снять, так как в неравенство (257.3) входят только производные $(dT/dz)_{\text{ад}}$ и dT/dz, значения которых от знака dz не зависят. Для большинства тел температурный коэффициент расширения положителен, и вместо условия (257.3) можно написать более простое условие

$$\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}}. \tag{257.4}$$

Для тел с отрицательным температурным коэффициентом расширения знак неравенства надо заменить на противоположный. Ниже предполагается, что имеет место первый случай.

Таким образом, чем бо́льше температурный градиент dT/dz, тем более затруднена конвекция, тем устойчивее механическое равновесие жидкости. Нижней границей dT/dz, при которой конвекция еще может отсутствовать, является «адиабатический температурный градиент» $(dT/dz)_{\text{ад}}$. Для его вычисления замечаем, что при адиабатическом процессе удельная энтропия s не меняется. Рассматривая ее как функцию T и P, можем написать

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)_{\text{ад}} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}} + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dz} = 0.$$

Воспользовавшись термодинамическими соотношениями $(\partial s/\partial T)_P = c_P/T$, $(\partial s/\partial P)_T = -(\partial v/\partial T)_P$ и уравнением гидростатики $dP/dz = -\rho g = -g/v$, получим

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}} = -\frac{gT}{vc_P}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P. \tag{257.5}$$

Для воздуха, если его рассматривать как идеальный газ, объем v пропорционален температуре T (при $P = \text{const}$), а потому $(\partial v/\partial T)_P = v/T$. Это дает

$$(dT/dz)_{\text{ад}} = -g/c_P. \tag{257.6}$$

Этот результат уже был получен в решении задачи 133. (См. также задачу 588.)

§ 5. Теплопроводность

258. $m=\frac{\tau S\varkappa}{\lambda l}(t_1-t_2)=54$ г, где q — удельная теплота плавления льда, равная 80 кал/г.

259. $t_2-t_1=\frac{m\lambda l}{\tau S\varkappa}=0{,}013$ °C, где q — удельная теплота парообразования воды, равная приблизительно 539 кал/г.

260. $t_2-t_1=\frac{m\lambda}{\tau S}\left(\frac{l}{\varkappa}+\frac{l_1}{\varkappa_1}\right)\approx 2$ °C.

261. $t_1=\frac{\varkappa_1(t+t_3)+\varkappa t}{2\varkappa_1+\varkappa}\approx 92{,}8$ °C, $t_2=\frac{\varkappa_1(t+t_3)+\varkappa t_3}{2\varkappa_1+\varkappa}\approx 7$ °C.

262. $\varkappa_{\parallel}=n_1b_1\varkappa_1+n_2b_2\varkappa_2$, $\quad\frac{1}{\varkappa_{\perp}}=\frac{b_1n_1}{\varkappa_1}+\frac{b_2n_2}{\varkappa_2}$, $\varkappa_{\parallel}>\varkappa_{\perp}$.

263.

$$t_R=t_1-\frac{t_1-t_2}{\ln(R_2/R_1)}\ln(R/R_1). \qquad (263.1)$$

264.

$$t_R=\frac{t_2-t_1}{R_1-R_2}\,\frac{R_1R_2}{R}+\frac{t_1R_1-t_2R_2}{R_1-R_2}. \qquad (264.1)$$

265. Решение. Уравнение теплопроводности при наличии источников тепла с плотностью мощности q для сферически симметричных задач имеет вид

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q. \qquad (265.1)$$

В стационарном случае $\partial T/\partial t=0$, и после однократного интегрирования написанного уравнения ($q=\mathrm{const}$) получим

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{q}{3\varkappa}r+\frac{C}{r^2}.$$

Постоянная интегрирования C должна равняться нулю, так как в противном случае в центре шара мы получили бы бесконечное значение для производной dT/dr. Интегрируя вторично с учетом граничного условия $T=T_0$ при $r=R$, найдем

$$T=T_0+\frac{q}{6\varkappa}(R^2-r^2).$$

Температура в центре шара

$$T_{ц}=T_0+\frac{qR^2}{6\varkappa}=790\ \text{К}.$$

266. $T=T_0+\frac{I^2\rho}{4\pi^2R^4\varkappa}(R^2-r^2)$, где I — сила тока, ρ — удельное сопротивление провода, R — радиус провода, r — расстояние до его оси. Все величины выражаются в единицах системы СГС.

267. $\frac{8\pi a r_0}{7} T^{7/2} \approx 3{,}6 \cdot 10^{12}$ кВт.

268. $P = \alpha ELQ/(2\varkappa S)$.

269. Решение. Для справедливости теоремы единственности существенно, что температуропроводность $\chi = \varkappa/(\rho c_v)$ всегда положительна. Допустим, что уравнение (269.1) имеет два решения: $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$, удовлетворяющие начальному условию (269.2) и краевым условиям (269.3). Тогда

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c}, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c}.$$

Вычитая почленно и вводя обозначение $\Theta = T_1 - T_2$, получим

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \qquad (269.4)$$

т. е. функция $\Theta(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности без источников. Кроме того, ясно, что эта функция удовлетворяет «нулевым» начальным и граничным условиям:

$$\Theta_{t=0} = 0 \text{ при любых } x, \qquad (269.5)$$

$$\Theta_{x=0} = 0, \quad \Theta_{x=l} = 0 \text{ при любых } t. \qquad (269.6)$$

Рассмотрим интеграл $I(t) = \int\limits_0^l \Theta^2 dx$. Ясно, что он не может быть отрицательным. Кроме того, ввиду (269.5), $I(0) = 0$. Найдем производную интеграла $I(t)$ по времени:

$$\frac{dI}{dt} = 2\int\limits_0^l \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial t} dx = 2\chi \int\limits_0^l \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{dI}{dt} = 2\chi \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_0^l - 2\chi \int\limits_0^l \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль ввиду граничных условий (269.6). Второе слагаемое отрицательно или нуль, так как $\chi > 0$. Таким образом, $dI/dt \leqslant 0$. С течением времени интеграл I может только убывать или оставаться постоянным. Первое невозможно, так как должно быть $I(0) = 0$, $I(t) \geqslant 0$. Остается единственная возможность $dI/dt = 0$, т. е. $I(t) = \text{const} = I(0) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\Theta(x, t) \equiv 0$, т. е. $T_1(x, t) \equiv T_2(x, t)$. Единственность решения доказана.

270. $T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20})\, e^{-t/\tau}$,

$$T_1 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2}(T_{10} - T_{20})\, e^{-t/\tau},$$

$$T_2 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}(T_{10} - T_{20})\, e^{-t/\tau},$$

где $\frac{1}{\tau} = \frac{\varkappa S}{l}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$; $t_{1/2} = \tau \ln 2$.

271. Решение. Обозначим буквой x толщину образовавшегося слоя льда к моменту времени t. Если замерзание идет не очень быстро, как это в действительности имеет место в естественных условиях, то в слое льда установится линейное падение температуры от $T_{пл}$ до T. В этом случае тепло, уходящее наружу от единицы поверхности льда за время dt, представится выражением

$$\varkappa \frac{T_{пл} - T}{x}\, dt.$$

Но ту же величину можно представить в виде $q\rho\, dx$, где dx — толщина слоя льда, образовавшегося за время dt, ρ — плотность льда, q — удельная теплота плавления льда. Это приводит к уравнению

$$\varkappa \frac{T_{пл} - T}{x}\, dt = q\rho\, dx.$$

Умножая на x и интегрируя, получим

$$\varkappa (T_{пл} - T)\, t = \frac{1}{2} q\rho x^2 + A.$$

Примем за начало отсчета времени момент, когда образование льда на поверхности воды только что началось. Тогда $x = 0$ при $t = 0$, а потому $A = 0$. В результате получим

$$x = \sqrt{\frac{2\varkappa (T_{пл} - T)\, t}{q\rho}} \approx 11{,}3 \text{ см}.$$

272. Решение. Если таяние льда идет не очень быстро, то мгновенное распределение температуры в окружающей воде будет таким же, что и в стационарном случае при тех же граничных значениях температуры. Согласно (264.1) оно в рассматриваемом случае имеет вид

$$T = T_\infty + \frac{R}{r}(T_0 - T_\infty),$$

где R — мгновенное значение радиуса куска льда, T_0 и T_∞ — постоянные температуры воды на поверхности шара и в бесконечности (по условию задачи $T_\infty - T_0 = 10$ °C). Количество тепла, поступающее к шару от окружающей воды за время dt, равно

$$4\pi r^2 \varkappa \frac{dT}{dr}\, dt = 4\pi\varkappa R\, (T_\infty - T_0)\, dt.$$

Это тепло идет на расплавление льда и потому может быть также представлено выражением

$$-q\,dm = -4\pi R^2 \rho_л q\,dR.$$

Приравнивая оба выражения, получим

$$\varkappa (T_\infty - T_0)\,dt = -\rho_л q R\,dR.$$

Отсюда интегрированием находим искомое время таяния льда:

$$\tau = \frac{\rho_л q R_0^2}{2\varkappa (T_\infty - T_0)} \approx 2480 \text{ с} \approx 40 \text{ мин}.$$

273. $t_0 = \dfrac{t_1 t_3 - t_2^2}{t_1 + t_3 - 2t_2} = 16\ °C,$

$t_4 = t_0 + \dfrac{(t_2 - t_0)^3}{(t_1 - t_0)^2} = 43\ °C.$

274. $Q = \dfrac{S\alpha\varkappa (t_1 - t_4)}{\alpha l + 2\varkappa}\,\tau = 1550$ ккал,

$t_2 = \dfrac{\varkappa (t_1 + t_4) + \alpha l t_1}{\alpha l + 2\varkappa} = 11\ °C,$

$t_3 = \dfrac{\varkappa (t_1 + t_4) + \alpha l t_4}{\alpha l + 2\varkappa} = -1\ °C.$

275. $M = \dfrac{\varkappa\alpha S\tau (t_1 - t_2)}{(2\varkappa + \alpha L)\,q} = 1{,}21$ т.

276. $t_2 = \dfrac{\varkappa t_1 + L\alpha t_3}{\varkappa + \alpha L}.$

277. 1) $t_2 \to t_1$, если $L \to 0$; 2) $t_2 \to t_3$, если $\varkappa \to 0$.

278. $\tau = \dfrac{mc}{\alpha S} \ln \dfrac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3}.$

279. 1) $R = \varkappa/\alpha = 1{,}2$ см; 2) значение R найдется решением трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{R} + \frac{\alpha}{\varkappa} \ln \frac{R}{r} = \frac{2}{r}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{5}{6} \ln R + \frac{1}{R} = 2.$$

Решение его методом последовательных приближений дает $R \approx 10$ см.

280. Решение. Рассмотрим тепловой баланс в объеме стержня между сечениями x и $x + dx$. Слева в этот объем за время $d\tau$ входит количество тепла $-\varkappa\,(\partial t/\partial x)\,S\,d\tau$. Справа выходит $-\varkappa\,(\partial t/\partial x)_{x+dx} S\,d\tau$. Кроме того, благодаря теплообмену из объема через его боковую поверхность уходит тепло $\alpha p\,dx\,(t - t_3)\,d\tau$. С другой стороны, тепло, поступившее в рассматриваемый объем стержня, равно $S\,dx\,c\rho\,dt$. Итак,

$$-\varkappa \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) S\,d\tau - \left[-\varkappa \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x+dx} S\,d\tau\right] - \alpha p\,dx\,(t - t_3)\,d\tau = S\,dx\,c\rho\,dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\varkappa}{c\rho}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\frac{\alpha p}{c\rho S}(t-t_3).$$

281. $t=t_3+\dfrac{(t_2-t_3)\,\mathrm{sh}\,[\beta x]+(t_1-t_3)\,\mathrm{sh}\,[\beta(l-x)]}{\mathrm{sh}\,\beta l}$,

где $\beta=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\varkappa}\dfrac{p}{S}}$.

282. $t=(t_1-t_2)\dfrac{\mathrm{sh}\,[\beta(l-x)]}{\mathrm{sh}\,[\beta l]}+t_2$. Если $\beta l\gg 1$, $\beta(l-x)\gg 1$, то $t=t_2+(t_1-t_2)e^{-\beta x}$. Если, сверх того, $\beta x\gg 1$, то $t\approx t_2$.

283. $t=t_3+2(t_1-t_3)\dfrac{\mathrm{sh}\,[\beta l/2]}{\mathrm{sh}\,[\beta l]}=72$ °C.

284. $\varkappa_2=\varkappa_1 x_2^2/x_1^2$.

285. $\varkappa_2=\dfrac{d_2(t_1-t_2)}{d_1(t_2-t_3)}\varkappa_1=0{,}00033$ кал/(с·см·°C).

288. $t=t_1\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\dfrac{x}{a}\right\}\cos\left(\omega\tau-\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\dfrac{x}{a}\right)+t_0$.

289. $v=a\sqrt{2\omega}$, $\gamma=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}$.

290. $v=1/\sqrt{365}=0{,}052$ м/сут.

291. $\gamma_1/\gamma_2=\sqrt{T_2/T_1}=\sqrt{1/365}=1/19$.

292. Решение. За период звуковой волны τ тепло распространяется на расстояние $l\sim v\tau$. Адиабатическим приближением можно пользоваться, если это расстояние мало по сравнению с длиной звуковой волны $\lambda=c\tau$, т. е. при условии $v\ll c$ (c — скорость звука, v — скорость распространения температурных волн). Пользуясь ответом к задаче 289, это условие можно записать в виде $\omega\ll c^2/(2a^2)$.

293. В решении предыдущей задачи величину λ следует заменить на диаметр стержня $2r$. Это дает $\omega\gg 2\pi^2a^2/r^2$.

294. Решение. Рассматриваемая задача является типичной краевой задачей, к которой применима теорема единственности (см. задачу 269). Направим ось X внутрь среды перпендикулярно к ее границе. Для нахождения решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

удовлетворяющего требуемым краевым и начальным условиям, применим сначала метод размерности. Из шести величин T, x, t, T_0, T_1, a можно составить только три независимые безразмерные комбинации, например, T/T_0, T_1/T_0, $x/(a\sqrt{t})\equiv\xi$. Вторая из них есть постоянное число и может не приниматься во внимание. Поэтому должно быть $T=f(\xi)$. Подставляя это выражение в уравнение теплопровод-

ности, придадим ему вид

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}=-2\xi\frac{df}{d\xi}.$$

Обозначая дифференцирование по ξ штрихом и разделяя переменные, получим

$$\frac{df'}{f'}=-2\xi\,d\xi=-\,d\xi^2.$$

Отсюда двукратным интегрированием находим

$$T=A\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}d\xi+B.$$

Постоянная B дает температуру поверхности среды во все моменты времени $t\neq 0$. По условию она постоянна и равна T_1. Постоянная A определится из начального условия: $T=T_0$ при $t=0$. Это дает

$$T_0=A\int\limits_0^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi+T_1=\frac{A\sqrt{\pi}}{2}+T_1.$$

Окончательно

$$T=2\frac{T_0-T_1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}d\xi+T_1.$$

Отсюда получаем температурный градиент

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_0-T_1}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}.$$

В частности, на границе среды, т. е. при $x=0$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_0-T_1}{a\sqrt{\pi t}}=2\frac{T_0-T_1}{v\sqrt{\tau t}}=\frac{\gamma(T_0-T_1)}{\pi}\sqrt{\frac{\tau}{t}},$$

где $v=2a\sqrt{\pi/\tau}$ — фазовая скорость температурных волн, τ — их период, $\gamma=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$ — коэффициент затухания (см. задачу 289).

295. $t=\frac{4(T_0-T_1)^2}{v^2\tau(\partial T/\partial x)^2}=\frac{4\cdot 4000^2}{(1/25)^2}$ сут $\approx 10^8$ лет. Приведенная оценка дает сильно заниженное значение для возраста Земли (по геологическим оценкам возраст Земли $\sim$4—4,5 миллиардов лет). Она не учитывает интенсивное выделение тепла в результате радиоактивных процессов. Кроме того, модель «огненножидкой» Земли не согласуется со многими фактами и в настоящее время не считается правильной.

§ 6. Кинетическая теория вещества

296. $n=3{,}24\cdot 10^{13}$.

297. $n=3{,}34\cdot 10^{22}$.

298. $n=2{,}7\cdot 10^{19}$.

299. $n=10^{4}$.

300. $P=NkT/V=1{,}74\cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.

301. 1) $\overline{v}_{кв}=\sqrt{3RT/\mu}=1838$ м/с; 2) 493 м/с; 3) 461 м/с, где μ — относительная молекулярная масса газа.

302. $K=3kT=1{,}26\cdot 10^{-13}$ эрг (от массы молекулы не зависит); $\overline{v}_{кв}=3{,}5$ м/с.

303. $\overline{p}_{кв}=\sqrt{3mkT}=6{,}9\cdot 10^{-19}$ г·см/с.

304. Решение. Когда снаряд движется в стволе орудия со скоростью, превышающей скорость теплового движения молекул пороховых газов, последние почти перестают оказывать давление на дно снаряда и ускорять его. Отсюда следует, что максимально достижимая скорость снаряда при вылете из ствола орудия будет порядка средней скорости теплового движения молекул пороховых газов. Она тем больше, чем выше температура пороховых газов и чем меньше их относительная молекулярная масса.

305. $\overline{v}_{кв}=c_{зв}\sqrt{3/\gamma}$, где $\gamma=C_P/C_V$.

306. $PV={}^1/_3N\overline{cp}={}^1/_3\overline{E}$, где $\overline{E}$ — средняя полная энергия фотонов в сосуде.

307. Решение. Пусть поршень в цилиндре движется со скоростью u, малой по сравнению со средней скоростью газовых молекул v. Примем ось цилиндра за ось X прямоугольной системы координат. Рассмотрим отражение от поршня молекулы, x-компонента скорости которой относительно стенок цилиндра равна v_x.

Введем движущуюся систему координат, связанную с поршнем. В этой системе x-компонента скорости рассматриваемой молекулы будет v_x-u. При отражении от поршня x-компонента скорости сохранит в движущейся системе координат свою величину, но изменит знак. Таким образом, после отражения молекула относительно движущейся системы координат будет иметь скорость $-(v_x-u)$, а относительно стенок сосуда — скорость $-(v_x-u)+u=-v_x+2u$. Две остальные компоненты скорости при отражении не изменяются. Поэтому изменение кинетической энергии молекулы равно

$$\frac{m}{2}(v_x-2u)^2-\frac{m}{2}v_x^2=-mv_xu,$$

если пренебречь членом с u^2.

Обозначим через N_i число молекул, x-компонента скорости которых равна v_{ix}. Число молекул такого типа, ударяющихся о поршень

в одну секунду, равно $\frac{N_i}{V}v_{ix}S$, где S — площадь поршня. Изменение кинетической энергии этих молекул в одну секунду равно $-\frac{Sum}{V}N_i v_{ix}^2$, а изменение кинетической энергии всего газа:

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{Sum}{V}\sum N_i v_{ix}^2=-\frac{SuNm}{V}\overline{v_x^2}=-\frac{1}{3}\frac{SuNm}{V}\overline{v^2}=-\frac{2}{3}\frac{Su}{V}E.$$

Подставляя сюда $Su=dV/dt$ и интегрируя, получим $EV^{2/3}=\text{const}$. Наконец, принимая во внимание, что $PV={}^2/_3E$, находим

$$PV^{5/3}=\text{const}.$$

308. Решение. Рассуждения, приведенные в решении предыдущей задачи, сохраняют силу и для двухатомного газа. Разница состоит только в том, что полная энергия E одноатомного газа есть кинетическая энергия поступательного движения его молекул, а в двухатомном газе к ней прибавляется еще кинетическая энергия вращательного движения молекул. Однако при отражении от движущегося поршня вращательная энергия молекулы не изменяется. По-прежнему претерпевает изменение лишь x-компонента поступательной скорости движения молекулы. Поэтому, как и в решении предыдущей задачи, можно написать

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{3}\frac{uSNm}{V}\overline{v^2}.$$

По классической теории кинетическая энергия при тепловом равновесии равномерно распределяется по степеням свободы. Принимая, что молекула двухатомного газа имеет пять степеней свободы (три поступательные и две вращательные), найдем для полной энергии

$$E=\frac{1}{2}Nm\overline{v^2}+\frac{1}{3}Nm\overline{v^2}=\frac{5}{6}Nm\overline{v^2}.$$

Поэтому $\frac{dE}{dt}=-\frac{2}{5}\frac{Su}{V}E$, откуда $EV^{2/5}=\text{const}$. Наконец, принимая во внимание, что $PV={}^1/_3Nm\overline{v^2}={}^2/_5E$, находим

$$PV^{7/5}=\text{const}.$$

309. 1) $T_g\approx 0{,}05$ К, 2) $T_g\approx 6{,}5\cdot 10^4$ К. Отсюда видно, что ко всем молекулярным и атомным газам классический способ рассмотрения применим, а к электронам металлов — неприменим.

310. 1) 0,03 атм, 2) $\sim 7{,}6\cdot 10^4$ атм.

311. $\frac{n_1}{n_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}\exp\left\{\frac{\mu(v_2^2-v_1^2)}{2RT}\right\}=0{,}98$, где μ — относительная молекулярная масса газа.

312. $\overline{v_x^2}=\frac{kT}{m}$; $\frac{\overline{mv_x^2}}{2}=\frac{kT}{2}$.

313. $v_m=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=342$ м/с,

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=1{,}13\ v_m=386\ \text{м/с},$$

$$\bar{v}_{\text{кв}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}=1{,}23\,v_m=420\ \text{м/с}.$$

314. $t=153$ °C.

316. $\bar{v}\sim P^{1/6}$.

317. $dN=2\pi N(\pi kT)^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\}d\varepsilon.$ (317.1)

318. $\varepsilon_m=kT/2$.

319. $T=mv^2/(3k)$.

320. Решение. Искомая скорость определяется из уравнения

$$\Phi(x)-x\frac{d\Phi}{dx}=\frac{1}{2},$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности ошибок:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi,$$

а $x^2=mv_{1/2}^2/(2kT)$. Уравнение нетрудно решить, пользуясь таблицами функции $\Phi(x)$ и ее производной $\Phi'(x)$ [1]). Таким путем находим $x=1{,}088$, $v_{1/2}=1{,}088\sqrt{2kT/m}$.

321. $\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}=\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}=\frac{4}{\pi\bar{v}}$.

322. Решение. Искомое число молекул dN равно среднему числу скоростных точек в элементе объема пространства скоростей, заключенном между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами $v_\perp$ и $v_\perp+dv_\perp$ и высотой $dv_\parallel$. Объем этого элемента равен $d\omega=2\pi v_\perp dv_\perp dv_\parallel$, а среднее число скоростных точек в нем

$$dN=f\,d\omega=2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\}v_\perp dv_\perp dv_\parallel.$$

323. $\alpha=\exp\left\{-\frac{eV}{kT}\right\}$, где e — заряд электрона (по абсолютной величине). 1) $\alpha=13{,}5\%$; 2) $\alpha=1{,}8\%$.

324. $v=2\pi R^2n/\delta=660$ м/с.

---

[1]) См., например, *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*, Специальные функции, «Наука», 1964.

325. Решение. Если установка неподвижна, то молекулы конденсируются в точке D. При вращении всей установки молекулы со скоростями v попадают в D'. Смещение по дуге DD' равно $x=C/v$, где C — постоянная прибора. Число молекул dN со скоростями между v и $v+dv$, ежесекундно испускаемых источником A, пропорционально $vF(v)\,dv$. Выражая dv через dx, представим его в виде $dN=v^3F(v)\,dx$. Отсюда видно, что линейная плотность распределения молекул, сконденсировавшихся на поверхности цилиндра, пропорциональна $v^3F(v)$, т. е. $v^2\exp\left\{-v^2/v_m^2\right\}$. Эта плотность максимальна при $v=\sqrt{^5/_2}\,v_m$, где v_m — наиболее вероятная скорость.

326. Решение. Рассмотрим сначала частный случай, когда абсолютные значения скоростей всех молекул одинаковы, но их распределение по скоростям изотропно. В этом случае число молекул в 1 см³, направления скоростей которых лежат внутри телесного угла $d\Omega$, будет $dn=n\,d\Omega/(4\pi)$, где n — число молекул в 1 см³. Рассмотрим молекулы, ударяющиеся об 1 см² стенки и подлетающие к ней с углами падения между ϑ и $\vartheta+d\vartheta$. Для них

$$d\Omega=2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta,\quad dn={}^1/_2 n\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Число ударов молекул рассматриваемого типа об 1 см² стенки в 1 с будет

$$dz={}^1/_2 nv\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до $\pi/2$, найдем $z={}^1/_4 nv$.

Если абсолютные скорости молекул различны, то молекулы следует разбить на группы с практически одинаковыми значениями скоростей. Таким путем легко получить

$$z={}^1/_4 n\bar{v},\qquad (326.1)$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость молекул. Для максвелловского распределения

$$z=\frac{n}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.\qquad (326.2)$$

327. Для изотропного распределения

$$E={}^1/_8 mn\overline{v^3};$$

для максвелловского распределения

$$E=n\sqrt{\frac{2k^3T^3}{m\pi}}=\frac{\pi nm}{16}\bar{v}^3,$$

где m — масса молекулы, n — число молекул в 1 см³.

328. $\bar{\varepsilon}=2kT$.

329. Решение. Если отверстие S очень мало, то распределение скоростей исказится очень мало, т. е. останется изотропным и максвелловским. По формуле (326.1)

$$d(Vn)=-{}^1/_4 Sn\bar{v}\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$n=n_0e^{-t/\tau},$$

где $\tau=4V/S\bar{v}$. Отсюда

$$t_{1/2}=\tau\ln 2.$$

330. $n=n_0(1-e^{-t/\tau})$. Обозначения такие же, как и в предыдущей задаче.

331. $t=\frac{4V}{S\bar{v}}\ln\frac{P_0-P_1}{P_0-P_2}\approx\frac{4V}{S\bar{v}}\frac{P_2-P_1}{P_0}\approx 1{,}17$ с,

$$t_{1/2}=\frac{4V}{S\bar{v}}\ln 2\approx 6{,}2\cdot 10^4\text{ с}=17\text{ ч}.$$

332. Решение. Уравнения баланса для молекул азота:

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(1)}}{dt}=-\frac{1}{4}\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{V}\left(N_{\text{а}}^{(1)}-N_{\text{а}}^{(2)}\right),$$

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(2)}}{dt}=-\frac{1}{4}\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{V}\left(N_{\text{а}}^{(2)}-N_{\text{а}}^{(1)}\right),$$

где $N_{\text{а}}^{(1)}$ и $N_{\text{а}}^{(2)}$ — числа молекул азота в первой и во второй половинах сосуда. Так как $N_{\text{а}}^{(1)}+N_{\text{а}}^{(2)}=N_{\text{а}}=\text{const}$, то первое уравнение приводится к виду

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(1)}}{dt}=-\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{2V}\left(N_{\text{а}}^{(1)}-\frac{N_{\text{а}}}{2}\right).$$

Интегрируя его с использованием начального условия $N_{\text{а}}^{(1)}=N_{\text{а}}$ при $t=0$, а затем определяя $N_{\text{а}}^{(2)}$ из соотношения $N_{\text{а}}^{(2)}=N_{\text{а}}-N_{\text{а}}^{(1)}$, получим

$$N_{\text{а}}^{(1)}=\frac{N_{\text{а}}}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{2V}t\right\}\right),$$

$$N_{\text{а}}^{(2)}=\frac{N_{\text{а}}}{2}\left(1-\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{2V}t\right\}\right).$$

Аналогично, для молекул кислорода:

$$N_{\text{к}}^{(1)}=\frac{N_{\text{к}}}{2}\left(1-\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{к}}}{2V}t\right\}\right),$$

$$N_{\text{к}}^{(2)}=\frac{N_{\text{к}}}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{к}}}{2V}t\right\}\right).$$

Так как начальные значения давления в обоих сосудах одинаковы, то $N_{\text{а}}=N_{\text{к}}=N$. Давление в первой половине сосуда:

$$P_1=\frac{1}{V}\left\{N_{\text{а}}^{(1)}+N_{\text{к}}^{(1)}\right\}kT=P\left[1+\frac{1}{2}\left(\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{2V}t\right\}-\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{к}}}{2V}t\right\}\right)\right].$$

Давление во второй половине сосуда:

$$P_2=P\left[1+\frac{1}{2}\left(\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{к}}}{2V}t\right\}-\exp\left\{-\frac{S\bar{v}_{\text{а}}}{2V}t\right\}\right)\right].$$

При $t=0$ и $t=\infty$ из последних двух уравнений следует $P_1=P_2=P$, как это и должно быть.

333. Решение. Поступая, как в задаче 330, для отношения концентраций легкой и тяжелой компонент внутри сосуда, найдем выражение

$$\beta=\alpha\frac{1-e^{-t/\tau_1}}{1-e^{-t/\tau_2}},$$

где индекс 1 относится к легкой, а индекс 2 — к тяжелой компонентам. Времена τ_1 и τ_2 связаны соотношением $\tau_2/\tau_1=2$. Учитывая это, найдем, что производная $d\beta/dt$ обращается в нуль, когда

$$e^{-t/\tau_2}=\sqrt{2}-1,$$

и следовательно, когда $\beta=\alpha\sqrt{2}$. Однако этому случаю соответствует не максимум и не минимум на кривой $\beta=\beta(t)$, а точка перегиба. Максимальное и минимальное значения величина β принимает на концах временно́го интервала $(0, \infty)$. При $t=0$ получается максимум: $\beta_{\text{макс}}=\alpha\tau_2/\tau_1=2\alpha$, при $t=\infty$ — минимум: $\beta_{\text{мин}}=\alpha$.

334. $^{15}/_{16}P$.

335. Решение. Уравнение баланса энергии:

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{8}nmS\overline{v^3}+Q.$$

Уравнение баланса числа частиц:

$$V\frac{dn}{dt}=-\frac{1}{4}nS\bar{v}.$$

По условию средняя энергия, приходящаяся на одну частицу, постоянна: $E/(Vn)=\text{const}$. Отсюда $dE=Edn/n$. Исключая dE и dn, получаем

$$\frac{E}{Vn}=\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{m\overline{v^3}}{\bar{v}}-\frac{4Q}{nS\bar{v}},$$

откуда

$$Q=\frac{m}{8}\left(\frac{\overline{v^3}}{\bar{v}}-\overline{v^2}\right)nS\bar{v}.$$

Для максвелловского распределения

$$Q=\frac{kT}{8}S\bar{v}n=\frac{kT}{8}S\bar{v}n_0e^{-t/\tau},$$

где $\tau=4V/(S\bar{v})$.

336. Решение. Из-за столкновений молекул со стенками сосуда и между собой внутри сосуда устанавливается максвелловское распределение скоростей. Условия сохранения числа частиц и кинетической энергии газа в сосуде имеют вид

$$n_0v_0={}^1/_4n\bar{v},\quad {}^1/_2n_0mv_0^3={}^1/_{16}nm\pi\bar{v}^3.$$

Отсюда находим

$$\bar{v}=\sqrt{2/\pi}v_0, \quad n=n_0\sqrt{8\pi}, \quad T=mv_0^2/(4k).$$

337. $\alpha=\left(1+\frac{\varepsilon}{kT}\right)\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\}$.

338. Скорость испарения определяется выражением

$$q={}^1/_4 nm\bar{v},$$

где n — концентрация атомов насыщенного пара вольфрама. Его давление будет

$$P=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{4}{3}q\frac{\overline{v^2}}{\bar{v}}.$$

При максвелловском распределении

$$\frac{\overline{v^2}}{\bar{v}}=3\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}}=3\sqrt{\frac{\pi RT}{8A}}$$

где A — относительная атомная масса, равная для вольфрама 184. Окончательно получаем

$$P=q\sqrt{\frac{2\pi RT}{A}}.$$

Подставив сюда численные значения, найдем для давления насыщенных паров вольфрама при $T=2000$ К: $P=8{,}6\cdot10^{-9}$ дин/см^2 $=6{,}4\cdot10^{-12}$ мм рт. ст.

339. $\frac{dM}{dt}=P\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}\approx 0{,}38$ г/(с·см^2), где μ — относительная молекулярная масса.

341. $N=\frac{RT\ln\alpha}{{}^4/_3\pi r^3(\rho-\rho_0)gi}=6{,}5\cdot10^{23}$.

342. $\mu=\frac{2RT\rho\ln\alpha}{\omega^2(\rho-\rho_0)(r_2^2-r_1^2)}$.

344. Решение. Температура газа не изменится. При свободном падении газ находится в состоянии невесомости. Начальное состояние его неравновесное — плотность вверху меньше, чем внизу. Однако средняя кинетическая энергия молекул всюду одинакова. При переходе в равновесное состояние плотности выравняются. Но полная кинетическая энергия молекул газа, определяющая его температуру, останется неизменной. Опыт аналогичен известному опыту Гей-Люссака с расширением газа в пустоту.

345. $\bar{\varepsilon}_{пот}=kT$, $C=C_p$.

346. $\bar{\varepsilon}_{пот}=\frac{1-\left(1+\frac{mgH}{kT}\right)\exp\left\{-\frac{mgH}{kT}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{mgH}{kT}\right\}}kT.$

347. $C = C_V + \frac{R}{12}\left(\frac{\mu g H}{RT}\right)^2$.

348. Число молекул dN с координатами между r и $r+dr$, z и $z+dz$ равно

$$dN = \frac{Ng\left(\frac{m\omega}{kT}\right)^2 \exp\left\{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right\} r\,dr \cdot \exp\left\{-\frac{mgz}{kT}\right\} dz}{\left(1-\exp\left\{-\frac{mgH}{kT}\right\}\right)\left(\exp\left\{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right\}-1\right)},$$

где N — общее число молекул в сосуде. Ось Z направлена вертикально вверх.

349. Решение. Направив ось Z вертикально вверх, можем написать $m\ddot{z} + mg = 0$. Умножая это соотношение на z и принимая во внимание, что $z\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{z}) - \dot{z}^2$, получим

$$\frac{d}{dt}(mz\dot{z}) + mgz - m\dot{z}^2 = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по периоду движения. Тогда интеграл от первого слагаемого даст нуль, и мы найдем искомую связь:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = 2\bar{\varepsilon}_{\text{кин}}.$$

В случае молекулы одноатомного газа, учитывая столкновения, получим $\bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = {}^2/_3\bar{\varepsilon}_{\text{кин}}$. Для двухатомного газа, согласно теореме о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы, $\bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = {}^2/_5\bar{\varepsilon}_{\text{кин}}$. Полная энергия моля газа в поле тяжести:

$$E = N(\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пот}}) = {}^7/_5 N\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = {}^7/_2 RT.$$

Ее производная по T есть C_P, тогда как C_V есть производная только от кинетической энергии $N\bar{\varepsilon}_{\text{кин}} = {}^5/_2 RT$. Это дает $C_P - C_V = R$. Вывод нетрудно распространить на одноатомные и многоатомные газы.

350. Решение. Потенциальная энергия молекулы в гравитационном поле планеты равна $-GMm/r$, где M — масса планеты, G — гравитационная постоянная. Если бы атмосфера находилась в тепловом и механическом равновесии, то концентрация молекул n должна была бы определяться формулой Больцмана

$$n = n_\infty \exp\left\{\frac{GMm}{kT}\right\},$$

т. е. оставалась бы конечной при $r = \infty$, что невозможно, так как число молекул в атмосфере ограничено. Противоречия не получится только при $n_\infty = 0$, а следовательно, при $n = 0$, т. е. при полном отсутствии атмосферы. Планеты имеют атмосферы только потому, что

последние рассеиваются очень медленно. (См. решение следующей задачи.)

351. Решение. Так как процесс рассеяния атмосферы очень медленный, то можно считать, что к изотермической атмосфере применимо распределение Максвелла—Больцмана. Тогда число молекул, покидающих планетную атмосферу в единицу времени, представится выражением

$$-\frac{dN}{dt}=\frac{S\bar{v}n}{4}\int\limits_{v_{уб}}^{\infty}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi v^2\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}dv,$$

где S — площадь поверхности планеты, n — концентрация молекул у ее поверхности, $v_{уб}$ — скорость убегания, $\bar{v}$ — средняя скорость убегающих молекул:

$$\bar{v}=\int\limits_{v_{уб}}^{\infty}v^3\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}dv\Big/\int\limits_{v_{уб}}^{\infty}v^2\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}dv.$$

Полное число молекул N в атмосфере можно определить, пренебрегая кривизной поверхности планеты. По формуле Больцмана

$$N=Sn\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}dh=\frac{kT}{mg}Sn,$$

где g — ускорение свободного падения на поверхности планеты. Используя написанные соотношения и выполнив простое интегрирование, получим

$$\frac{dN}{dt}=-\frac{N}{\tau},$$

где

$$\tau=\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\frac{\exp\{x_{уб}^2\}}{g(x_{уб}^2+1)},\quad x_{уб}=\frac{v_{уб}}{\sqrt{2kT/m}}.$$

Время τ и есть время рассеяния атмосферы планеты. Для Земли $g=980$ см/с^2, $v_{уб}=11{,}2$ км/с. Используя эти данные, получаем для атомарного водорода $\tau\approx 27$ лет, а для молекулярного водорода $\tau\approx$ $\approx 2\cdot 10^{12}$ лет (при $T=300$ К).

352. $\bar{E}={}^1/_2kT=2{,}1\cdot 10^{-14}$ эрг, $\sqrt{\overline{\nu^2}}=7{,}2\cdot 10^{11}$ Гц.

353. $K={}^5/_2PV=2{,}75\cdot 10^3$ Дж.

354. $\bar{\varepsilon}=kT\,(V_1/V_2)^{\gamma-1}=1{,}65\cdot 10^{-13}$ эрг.

355. $Q=\frac{19}{6}\frac{\Delta T}{T}PV\approx 55$ ккал.

356. $c_P=\frac{71}{188}R\approx 0{,}75$ кал/(г·°С).

357. $Q=\frac{5}{2}\frac{P_1V_1}{T_1}(T_2-T_1)=6{,}97\cdot10^5$ Дж $=1{,}66\cdot10^5$ кал.

358. $Q=\frac{7}{2}\frac{P_1V_1}{T_1}(T_2-T_1)=19{,}5\cdot10^5$ Дж $=3{,}65\cdot10^5$ кал.

359. $Q={}^7/_2A=70$ Дж.

360. $Q=\frac{7}{2}PV\ln\frac{T_2}{T_1}\approx\frac{7}{2}PV\frac{T_2-T_1}{T_1}\approx1{,}45\cdot10^5$ Дж $=34{,}7$ ккал.

361. $C_1=6{,}14$ кал/(моль·°C),

$C_2=6{,}15$ кал/(моль·°C).

362. $C_V=6R$ для XV, $C_V=9R$ для XV_2.

Решение. Каждый атом молекулы имеет три степени свободы. Если молекулы образуют твердое тело, то атомы совершают малые колебания около положений равновесия. Согласно классической статистике на одну степень свободы приходится средняя кинетическая энергия ${}^1/_2kT$. Так как средние кинетическая и потенциальная энергии при гармоническом колебании равны между собой, то полная энергия, приходящаяся на один атом, в среднем составляет $3kT$. Если в молекуле n атомов, то средняя энергия на одну молекулу составляет $3nkT$, а молекулярная теплоемкость $3nR$.

363. $c_v={}^{27}/_{32}R=1{,}68$ кал/(г·°C).

364. $P_{\text{бом}}=N\rho ZkT/A\approx7{,}5\cdot10^{10}$ атм, где N — число Авогадро, $Z=92$ — атомный номер урана, $A=238$ — его относительная атомная масса; $P_З=\rho_З gR/2\approx1{,}7\cdot10^6$ атм, где R — радиус Земли.

365. В системе СГС:

$$Q=\frac{3}{5}GM^2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{3}{5}GM^2\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}.$$

Если $R_2=0{,}9R_1$, то

$$Q=\frac{3}{50}\frac{\gamma M^2}{R_1}=2{,}3\cdot10^{17}\text{ эрг}.$$

Энергия, излучаемая Солнцем в течение одного года, составляет около $1{,}2\cdot10^{41}$ эрг. Выделившегося при сжатии Солнца тепла хватит примерно на $1{,}9\cdot10^6$ лет. Температура Солнца при внезапном сжатии его на одну десятую первоначального радиуса повысилась бы приблизительно на $4{,}6\cdot10^5$ °C.

Решение. Рассчитаем сначала теплоту образования Солнца W из бесконечно разреженной материи. Возьмем бесконечно тонкий шаровой слой с массой dm, центр которого совпадает с центром Солнца. Результирующая гравитационных сил, с которыми на элемент массы рассматриваемого слоя действуют все массы, находящиеся дальше него от центра Солнца, равна нулю. Массы же, расположенные ближе к центру Солнца, действуют на слой так, как если бы они были сосредоточены в центре Солнца. Если их общая масса

равна m, то при перемещении слоя из бесконечности на расстояние r от центра Солнца гравитационные силы совершат работу

$$G\frac{m\,dm}{r}=\frac{4\pi}{3}G\rho r^2\,dm,$$

где ρ — плотность Солнца. Допустим теперь, что процесс образования Солнца из бесконечно разреженной материи закончился. Тогда $dm=4\pi r^2\rho\,dr$, и для теплоты образования мы получаем

$$W(R)=\int_0^R\frac{4\pi}{3}G\rho r^2 4\pi r^2\rho\,dr=\frac{16}{15}\pi^2G\rho^2R^5=\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R},$$

где R — радиус Солнца. Аналогично для тепла Q, получившегося при уменьшении радиуса Солнца, получаем

$$Q=W(R_2)-W(R_1).$$

Если бы Солнце состояло только из водорода, то, разумеется, водород был бы не только диссоциирован, но и полностью ионизован. Таким образом, на каждый грамм массы Солнца приходилось бы $2N$ частиц: N электронов и N протонов. Средняя кинетическая энергия их теплового движения $2N\cdot{}^3/_2kT=3RT$. Значит, удельная теплоемкость солнечного вещества в этом случае была бы равна $c_v=3R\approx$ ≈ 6 кал/(г·°С).

Из приведенных вычислений следует, что теория Гельмгольца — Кельвина несостоятельна. Излучение звезд происходит за счет энергии ядерных реакций внутри звезд. Гравитационное сжатие становится основным источником энергии лишь на поздних этапах эволюции звезд (белые карлики, нейтронные звезды, или пульсары, коллапсары, или «черные дыры»).

366. $\gamma=1+\dfrac{\nu_1+\nu_2}{{}^5/_2\nu_1+{}^3/_2\nu_2}=1{,}462.$

367. $c_{зв}=\sqrt{\gamma RT/\mu}$, где μ — средняя относительная молекулярная масса:

$$\mu=\frac{\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2+\nu_3\mu_3+\dots}{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots},$$

а γ — показатель адиабаты смеси:

$$\gamma=\frac{\nu_1c_{P1}+\nu_2c_{P2}+\nu_3c_{P3}+\dots}{\nu_1c_{V1}+\nu_2c_{V2}+\nu_3c_{V3}+\dots}.$$

368. $c_{зв}=\sqrt{{}^{15}/_{16}RT}\approx 3\cdot10^7$ см/с ≈ 300 км/с.

369. $\overline{E}=\dfrac{h\nu}{\exp\{h\nu/kT\}-1}$, $\quad\overline{E}_1=1{,}6\cdot10^{-14}$ эрг,

$\overline{E}_2=6\cdot10^{-20}$ эрг, $\qquad\overline{E}_{кл}=kT=4{,}1\cdot10^{-14}$ эрг.

370. $\Theta = h\nu/k$, $\Theta_{H_2} = 6100$ K, $\Theta_{O_2} = 2250$ K, $\Theta_{HCl} = 4200$ K.

371. $C_V = \dfrac{R\,(h\nu/kT)^2 \exp\{h\nu/kT\}}{(\exp\{h\nu/kT\} - 1)^2} \approx R\,(h\nu/kT)^2 \exp\{-h\nu/kT\} \approx$
$\approx 0{,}03R = 0{,}06$ кал/(моль$\cdot$°C).

372. $\Theta = \dfrac{h^2}{4\pi^2 kI}$, $\Theta_{H_2} = 170$ K, $\Theta_{O_2} = 4{,}2$ K.

374. Величина теплоемкости должна быть меньше классического значения.

Решение. Молекула водорода H_2 имеет шесть степеней свободы: три степени свободы поступательного движения, две вращательного и одну колебательного. Если можно пренебречь силами взаимодействия молекул газа, то поступательное движение молекулы можно рассматривать как свободное движение по инерции. Такое движение не квантуется — его энергия может принимать любые значения. Напротив, колебательное и вращательное движения квантуются — их энергии не произвольны, а могут принимать лишь ряд дискретных значений. При обычных температурах квантованные значения энергии колебательного движения велики по сравнению со средней кинетической энергией поступательного движения молекулы $^3/_2kT$. Тепловое движение молекул слишком слабо, чтобы перевести молекулы с низшего (нулевого) уровня энергии колебательного движения на более высокие энергетические уровни. Почти все молекулы занимают низший уровень энергии колебательного движения. При этом условии энергия колебательного движения почти не зависит от температуры, и это движение не влияет на теплоемкость газа. Квантованные значения энергии вращательного движения обычно много меньше соответствующих значений для колебательного движения. Поэтому уже при обычных температурах возбуждаются всевозможные квантованные вращения молекул — на каждую степень свободы вращательного движения приходится почти такая же средняя энергия, что и на степень свободы поступательного движения. Однако, если температура газа настолько низка, что средняя энергия теплового движения молекулы мала по сравнению с разностями энергетических уровней вращательного движения, то вращения на высоких уровнях перестанут возбуждаться, и вращательные степени свободы не будут оказывать никакого влияния на теплоемкость газа. Водород начинает вести себя, как одноатомный газ.

375. $\overline{E} = \varepsilon/(e^{\varepsilon/kT} + 1) + {}^3/_2RT$. Если $\varepsilon \gg kT$, то $\overline{E} \approx {}^3/_2RT$.

376. Решение. Молекула CO_2 имеет $3\cdot 3 = 9$ степеней свободы: три поступательных, две вращательных и четыре колебательных. На поступательные степени свободы приходится молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V^{\text{пост}} = 3R/2.$$

Характеристическая температура для вращательного движения $\Theta^{вр}=h^2/(8\pi^2 Ik)=0,56$ К, т. е. $\Theta^{вр}\ll T$. При таких условиях вращения молекул можно учесть классически и написать

$$C_V^{вр}=2\cdot R/2=R.$$

Характеристические температуры для внутримолекулярных колебаний будут

$$\Theta_1^{кол}=\Theta_2^{кол}=h\nu_1/k=hc\tilde{\nu}_1/k=960 \text{ К},$$
$$\Theta_3^{кол}=hc\tilde{\nu}_3/k=1990 \text{ К},$$
$$\Theta_4^{кол}=hc\tilde{\nu}_4/k=3380 \text{ К}.$$

Следовательно, $\Theta_1^{кол}/T=\Theta_2^{кол}/T=3,51$, $\Theta_3^{кол}/T=7,28$, $\Theta_4^{кол}/T=12,8$. Теплоемкость, соответствующая i-й колебательной степени свободы, определяется выражением

$$C_{Vi}^{кол}=\frac{(\Theta_i^{кол}/T)^2 e^{\Theta_i^{кол}/T}}{\left(e^{\Theta_i^{кол}/T}-1\right)^2}R.$$

По этой формуле находим

$$C_{V1}^{кол}=C_{V2}^{кол}=0,391R,$$
$$C_{V3}^{кол}=0,036R, \quad C_{V4}^{кол}=3,4\cdot 10^{-5}R.$$

Отсюда видно, что при 0 °С последнее колебание практически не возбуждено и не влияет на теплоемкость. Для суммарной колебательной теплоемкости получаем

$$C_V^{кол}=(2\cdot 0,391+0,036)\,R=0,818R.$$

Следовательно,

$$C_V=(1,5+1+0,818)\,R=3,32R,$$
$$C_P=4,32R, \quad \gamma=C_P/C_V=1,3.$$

Полученные результаты (а также результаты, относящиеся к другим температурам) хорошо согласуются с опытными данными.

378. Решение.

$$C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V=-T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial T^2}\right)_V=12\,A\,(V)\,T^3,$$
$$P=-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial V}\right)_T=-\frac{dU_0}{dV}+T^4\frac{dA}{dV},$$
$$\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-\frac{1}{V_0}\frac{(\partial P/\partial T)_V}{(\partial P/\partial V)_T}=\frac{1}{V_0}\frac{4T^3\,dA/dV}{d^2U_0/dV-T^4 d^2A/dV^2}.$$

Отсюда и следует требуемый результат.

379. $\overline{\dot{\varphi}^2}$ уменьшится в α раз, $\overline{\varphi^2}$ увеличивается в β/γ^4 раз. Существенно отметить, что $\overline{\varphi^2}$ не зависит от момента инерции зеркальца; $N=RT/(D\overline{\varphi^2})\approx 6,04\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

380. $D\overline{\varphi_{\text{кв}}^2} = I\overline{\dot{\varphi}_{\text{кв}}^2} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \approx kT\left(1 + \frac{h^2\nu^2}{12k^2T^2}\right)$,

где $\nu = \frac{\sqrt{D/I}}{2\pi}$. Классические формулы применимы при $h\nu/(kT) \ll 1$. Для зеркальца $h\nu/kT = 2{,}5 \cdot 10^{-18}$.

381. Решение. $fg = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\,\Delta f + \bar{f}\,\Delta g + \Delta f\,\Delta g$. Усредняя и принимая во внимание, что $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$, находим

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f\,\Delta g}. \tag{381.1}$$

382.

$$\overline{\Delta f^2} = \overline{f^2} - \bar{f}^2. \tag{382.1}$$

384. Решение. На основании определения величины F

$$\bar{F} = \sum \bar{f}_i = N\bar{f}.$$

(Здесь опущен индекс i, так как предполагается, что все молекулы газа тождественны.) Далее,

$$F^2 = \left(\sum f_i\right)^2 = \sum f_i^2 + \sum_{i \neq j}\sum f_i f_j.$$

В силу независимости молекул идеального газа $\overline{f_i f_j} = \bar{f}_i \bar{f}_j = \bar{f}^2$. Следовательно,

$$\overline{F^2} = N\overline{f^2} + N(N-1)\bar{f}^2.$$

Подставляя эти значения в формулу (382.1), получим

$$\overline{\Delta F^2} = \overline{F^2} - \bar{F}^2 = N\left(\overline{f^2} - \bar{f}^2\right). \tag{384.1}$$

Относительная флуктуация величины F равна

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta F^2}}}{\bar{F}} = \frac{\sqrt{N}\sqrt{\overline{\Delta f^2}}}{N\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\sqrt{\overline{\Delta f^2}}}{\bar{f}}.$$

С увеличением N относительная флуктуация величины F убывает обратно пропорционально $\sqrt{N}$. При больших N относительные флуктуации ничтожны. С этим связана достоверность термодинамических выводов для больших систем.

385. Решение. Если объем V разбить на $z = V/v$ равных объемов $v_i = v$, то $N = \sum n_i$, где n_i — число молекул в i-м объеме, а суммирование ведется по всем таким объемам. Так как величины всех объемов v_i одинаковы, то средние числа молекул в них $\bar{n}_i$ также одинаковы. Поэтому $N = z\bar{n}$, т. е. $\bar{n} = Np$, где $p = v/V$ — вероятность нахождения молекулы в объеме v.

Определим далее величины f_i следующим образом: $f_i = 1$, если i-я молекула находится внутри объема v, и $f_i = 0$, если i-я молекула находится в оставшемся объеме $V - v$. Тогда число молекул n в объеме v можно представить в виде $n = \sum f_i$, предполагая, что

суммирование ведется по всем N молекулам объема V. Ясно, что функции f_i удовлетворяют условию $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \dots$ Далее, очевидно $\overline{f_i} = \overline{f_i^2} = \overline{f_i^3} = \dots = p$. Поэтому по формуле (382.1)

$$\overline{\Delta f_i^2} = \overline{f_i^2} - \overline{f_i}^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

А так как в случае идеального газа величины $f_1, f_2, f_3, \dots$ статистически независимы, то по формуле (384.1)

$$\overline{\Delta n^2} = Np(1-p) = (1-p)\overline{n}. \qquad (385.1)$$

Если $v \ll V$, то $p \ll 1$. Пренебрегая вероятностью p по сравнению с единицей, получим поэтому

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n}. \qquad (385.2)$$

386. $\dfrac{\sqrt{\overline{\Delta N^2}}}{\overline{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{N}}} \sim 10^{-6}$, $\overline{N} = {}^1/_4 Sn\overline{v}t = 1{,}2 \cdot 10^{12}$.

387. $P = (1/2)^N$, $N = \lg_2 (T/\tau) \sim 70$, где $\tau \sim 10^{-4}$ с — время разлета, т. е. среднее время, которое требуется молекуле газа, чтобы пролететь расстояние порядка размеров сосуда.

388. $V = 1/(N\alpha^2) = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$ см^3, $\overline{n} = 1/\alpha^2 = 10^{12}$, где N — число молекул в единице объема ($N = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$).

389. Решение. Возьмем какое-либо распределение, в котором объем V_1 содержит N_1, а объем V_2 — N_2 молекул. Зафиксировав положения всех молекул, произведем затем всевозможные перестановки их. Так как при таких перестановках числа молекул N_1 и N_2 в объемах V_1 и V_2 не меняются, то в результате получатся всевозможные комбинации молекул с требуемыми числами N_1 и N_2. Число таких комбинаций равно $N!$. Среди них будут и такие комбинации, которые получаются одна из другой в результате перестановки молекул либо в пределах только объема V_1, либо в пределах только объема V_2. Такие перестановки не приводят к новым распределениям молекул по объемам V_1 и V_2. Число перестановок в пределах первого объема равно $N_1!$, а в пределах второго $N_2!$. Разделив полное число перестановок $N!$ на $N_1!N_2!$, мы получим число z всех распределений молекул N по объемам V_1 и V_2 с требуемыми числами заполнения N_1 и N_2: $z = N!/(N_1!N_2!)$. В случае идеального газа все эти z распределений равновероятны. Найдем вероятность одного распределения. Вероятность того, что определенная молекула попадает в объем V_1, равна $p = V_1/(V_1 + V_2)$, а в объем V_2 — $q = V_2/(V_1 + V_2)$. Вероятность того, что N_1 фиксированных молекул попадут в объем V_1, а остальные N_2 молекул — в объем V_2, будет $p^{N_1}q^{N_2}$. Умножив ее на число распределений z, найдем

$$P = \frac{N!}{N_1!N_2!} p^{N_1} q^{N_2}. \qquad (389.1)$$

Это и есть математическая вероятность того, что числа молекул (безразлично каких) в объемах V_1 и V_2 будут равны соответственно N_1 и N_2.

390. Требуемый результат получится, если соотношение $p+q=1$ возвести в N-ю степень, воспользовавшись формулой бинома Ньютона.

391. Решение. Воспользовавшись формулой (389.1), получим

$$\frac{(N-n)!}{N!}\,\frac{(N+n)!}{N!}=\alpha,$$

где N — число Авогадро. После сокращения:

$$\frac{(1+1/N)\ \dots\ (1+n/N)}{(1-1/N)\ \dots\ (1-(n-1)/N)}=\alpha.$$

Логарифмируя и принимая во внимание, что $n/N \ll 1$, находим

$$2\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\dots+\frac{n-1}{N}\right)+\frac{n}{N}=\ln\alpha,$$

или $n^2/N=\ln\alpha$, откуда

$$n=\sqrt{N\ln\alpha}=\sqrt{N}=7{,}8\cdot 10^{11}.$$

392. Решение. В термодинамике энтропия N молекул идеального газа выражается формулой

$$S=N\left(c_v\ln T+k\ln\frac{V}{N}+s_0\right),$$

где c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, приходящаяся на одну молекулу, а s_0 — постоянная, не зависящая от числа частиц. В начальном состоянии энтропия системы

$$S_0=2N\left(c_v\ln T+k\ln\frac{V}{N}+s_0\right);$$

в конечном состоянии

$$S=(N-n)\left(c_v\ln T+k\ln\frac{V}{N-n}+s_0\right)+$$
$$+(N+n)\left(c_v\ln T+k\ln\frac{V}{N+n}+s_0\right).$$

Отсюда

$$S_0-S=k\,(N-n)\ln(N-n)+k\,(N+n)\ln(N+n)-2kN\ln N,$$

или с учетом соотношения $n/N\ll 1$:

$$S_0-S=2kn^2/N.$$

По формуле Больцмана

$$S_0-S=k\ln(P_0/P)=k\ln\alpha.$$

Это дает $2n^2/N=\ln\alpha$, откуда $n=\sqrt{2N\ln\alpha}$.

Расхождение с предыдущим решением объясняется следующим образом. В предыдущем решении принимаются во внимание всевозможные распределения молекул по объемам первого и второго сосудов с заданными числами заполнения. Во втором решении используется термодинамическое выражение для энтропии газа. Тем самым предполагается, что молекулы газа распределены по объему каждого сосуда равномерно или приблизительно равномерно. Сильно неравновесные состояния с неравномерным распределением молекул по объемам сосудов во внимание не принимаются. С этим и связано обсуждаемое расхождение.

393. Решение. Согласно формуле (389.1) вероятность того, что в объеме v находится n молекул идеального газа, будет

$$P_n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p^n q^{N-n}. \tag{393.1}$$

Поэтому

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{N} nP_n = Np\sum_{n=1}^{N}\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}p^{n-1}q^{N-n} = Np\,(p+q)^{N-1} = Np.$$

Аналогично,

$$\overline{n(n-1)} = N(N-1)\,p^2\sum_{n=2}^{N}\frac{(N-2)!}{(n-2)!\,(N-n)!}\,p^{n-2}q^{N-n} =$$
$$= N(N-1)\,p^2(p+q)^{N-2} = N(N-1)\,p^2.$$

Следовательно,

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np\,(1-p) = \bar{n}\,(1-p).$$

394. Решение. Замечая, что $p = v/V = \bar{n}/N$, $q = 1-p$, перепишем формулу (393.1) в виде

$$P_n = \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n+1}{N}\right)}{n!}\,(\bar{n})^n\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}.$$

Перейдем в этом выражении к пределу $N \to \infty$ при фиксированных $\bar{n}$ и n. Так как

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{\frac{N}{\bar{n}}\cdot\frac{N-n}{N}\bar{n}} = e^{-\bar{n}},$$

то таким путем получим

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{n!}\,e^{-\bar{n}} \tag{394.1}$$

(формула Пуассона).

395.

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\bar{n}}{n}\right)e^{(n-\bar{n})}. \tag{395.2}$$

396. Решение. В выражении для производной

$$\frac{d}{dn}(\ln P_n) = \ln \bar{n} - \ln n - \frac{n + {}^1/_2}{n} + 1$$

можно пренебречь ${}^1/_2$ по сравнению с n. Тогда производная обратится в нуль при $n = \bar{n}$. В этом случае $\ln P_n$ максимален. Вычислив вторую производную, найдем в требуемом приближении

$$\ln P_n = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} - \frac{1}{2\bar{n}}(n - \bar{n})^2,$$

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp\left\{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}\right\} \qquad (396.1)$$

(распределение Гаусса).

397. Решение. До флуктуации, когда состояние всего газа было равновесным, его энтропия определялась выражением

$$S_0 = Nc_v \ln T + Nk \ln \frac{V}{N},$$

где c_v — теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу газа. После флуктуации, когда в объеме v стало n частиц, энтропия газа будет

$$S = Nc_v \ln T + k(N-n) \ln \frac{V-v}{N-n} + kn \ln \frac{v}{n}.$$

Вычтем отсюда предыдущее выражение, пренебрегая при этом членами второй степени по v/V и n/N. Получим приращение энтропии газа в результате флуктуации:

$$\Delta S = k \ln \left[\left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{n-\bar{n}}\right].$$

По формуле Больцмана

$$\Delta S = k \ln \frac{P}{P_0},$$

и для искомой вероятности находим

$$P_n = P_0 \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{n-\bar{n}}.$$

Переход к распределению Гаусса производится так же, как переход от формулы (395.2) к формуле (396.1). Выполнив этот переход, затем можно определить постоянную P_0 из условия нормировки $\sum P_n = 1$.

398. Решение. Поршень можно рассматривать как гармонический осциллятор. Среднее значение его потенциальной энергии при смещении из положения равновесия на x равно ${}^1/_2\,\varkappa\overline{x^2} = {}^1/_2\,kT$, где $\varkappa$ — модуль упругости, соответствующий такому смещению. Очевидно, $\Delta V = Sx$, где ΔV — изменение объема системы, а S — площадь поршня.

Таким образом, $\overline{\Delta V^2}=S^2kT/\varkappa$. Сила, возвращающая поршень в положение равновесия, $F=S\frac{\partial P}{\partial x}x$, а потому

$$\varkappa=-S\frac{\partial P}{\partial x}=-S^2\frac{\partial P}{\partial V}.$$

В результате получим

$$\overline{(\Delta V^2)_T}=-\frac{kT}{(\partial P/\partial V)_T}=-kT\,(\partial V/\partial P)_T. \qquad (398.1)$$

Значок T поставлен потому, что в выводе предполагалось постоянство температуры окружающей среды (термостата). Если бы вещество внутри объема V было адиабатически изолировано, то, как следует из вывода, значок T следовало бы заменить на S (постоянство энтропии) и написать

$$(\overline{\Delta V^2})_S=-kT\,(\partial V/\partial P)_S. \qquad (398.2)$$

399. $\sqrt{\overline{\Delta V^2}}/V=\sqrt{kT\gamma_T/V}\approx 3{,}6\cdot 10^{-9}$.

400. $\sqrt{\overline{\Delta \rho^2}}/\rho=\sqrt{kT\gamma_T/V}$.

401. Решение. Согласно формуле (317.1)

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty \varepsilon T^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon\Big/\int_0^\infty T^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

где введено обозначение $\alpha=1/(kT)$. Обозначая знаменатель через Z и дифференцируя его по параметру α, получим

$$\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\alpha},\quad \overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2}.$$

Вычислив интеграл Z, по этим формулам найдем $\bar{\varepsilon}={}^3/_2\,kT$, $\overline{\varepsilon^2}= {}^{15}/_4\,k^2T^2$ и далее

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2={}^3/_2\,k^2T^2.$$

402. Решение. Рассматривая температуру подсистемы T как функцию U и V, пишем

$$(\Delta T)_V=\left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V\Delta U=\frac{1}{C_V}\Delta U,$$

откуда

$$(\overline{\Delta T^2})_V=\frac{1}{C_V^2}(\overline{\Delta U^2})_V=\frac{1}{C_V}kT^2.$$

Аналогично поступаем и в остальных случаях и получаем:

$$(\overline{\Delta S^2})_V = \frac{1}{T^2}(\overline{\Delta U^2})_V = kC_V,$$

$$(\overline{\Delta S^2})_P = \frac{1}{T^2}(\overline{\Delta I^2})_P = kC_P,$$

$$(\overline{\Delta P^2})_T = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^2 (\overline{\Delta V^2})_T = -kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

$$(\overline{\Delta P^2})_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S (\overline{\Delta V^2})_S = -kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S.$$

403.

$$z = n\sigma\bar{v}, \quad \lambda = 1/(n\sigma), \tag{403.1}$$

где n — среднее число молекул в единице объема, $\sigma = \pi d^2$ — газокинетическое поперечное сечение молекулы.

404. Решение. Точное выражение для z имеет вид $z = n\sigma\bar{v}_{\text{отн}}$, где $\bar{v}_{\text{отн}}$ — среднее значение скорости рассматриваемой молекулы относительно всех остальных молекул газа. Возьмем одну из таких молекул и назовем ее условно первой. Если рассматриваемая молекула движется под углом ϑ к направлению движения первой молекулы, то ее относительная скорость будет $v_{\text{отн}} = 2\bar{v}\sin(\vartheta/2)$ (рис. 42). Число молекул, скорости которых образуют с направлением движения молекулы 1 углы между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равно $\frac{n}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta$, а искомая средняя относительная скорость

$$\bar{v}_{\text{отн}} = \bar{v}\int_0^\pi \sin(\vartheta/2)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3}\bar{v}.$$

Значит,

$$z = \frac{4}{3}n\sigma\bar{v}, \quad \lambda = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{3}{4}\frac{1}{n\sigma}.$$

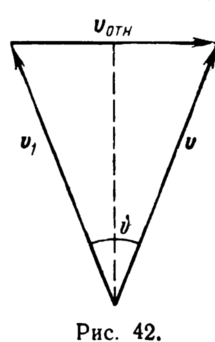


Рис. 42.

405. Решение. Рассмотрим совокупность скоростей какой-либо фиксированной молекулы газа относительно неподвижной системы отсчета, которые она получает в результате последовательных столкновений с другими молекулами газа. Эти скорости будут распределены по закону Максвелла. Рассмотрим теперь каждую из тех скоростей относительно молекулы, с которой произошло последнее столкновение. При рассмотрении относительного движения массу молекулы m надо заменить на приведенную массу $m_1m_2/(m_1+m_2)$, т. е. при равенстве m_1 и m_2 — на $m/2$. Так как при таком рассмотрении последовательность столкновений, а также действующие силы остаются неизменными, то распределение относительных скоростей после столкно-

вений будет по-прежнему максвелловским. Однако средние скорости из-за уменьшения массы увеличатся в $\sqrt{2}$ раз. Поэтому в первой формуле (403.1) величину $\bar{v}$ следует заменить на $\sqrt{2}\,\bar{v}$. Это дает

$$z=\sqrt{2}\,n\sigma\bar{v},\quad \lambda=\bar{v}/z=1/(\sqrt{2}\,n\sigma). \tag{405.1}$$

Эти формулы были получены Максвеллом.

406. $d=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}n\pi\lambda}}=2{,}5\cdot10^{-8}$ см.

407. $z=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n\approx2{,}2\cdot10^{6}$ с$^{-1}$.

408. $z=4\sqrt{\dfrac{\pi}{mkT}}\,Pd^2\sim4\cdot10^{10}$ с$^{-1}$.

409. $\nu=\dfrac{\pi d^2\bar{v}n^2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{\dfrac{\pi}{m}}\,\dfrac{P^2d^2}{(kT)^{3/2}}\sim6\cdot10^{28}$ с$^{-1}\cdot$см$^{-3}$.

410. $z\sim T^{-1/2},\quad \lambda\sim T$.

411. $z\sim P,\quad \lambda\sim P^{-1}$.

412. $z\sim P^{(\gamma+1)/(2\gamma)},\quad \lambda\sim P^{-1/\gamma}$, где $\gamma=C_P/C_V$.

413. $C=C_V+R/4$ (процесс политропический).

414. $C=C_V+R/2$ (процесс политропический).

415. $\lambda=3\eta/(\rho v)=0{,}89\cdot10^{-5}$ см.

416. $\bar{v}=\sqrt{8RT/(\pi A)}=3{,}8\cdot10^{10}$ см/с,

$\lambda=3\eta/(nm\bar{v})=0{,}92\cdot10^{-5}$ см,

$\nu=n\bar{v}/(2\lambda)=5{,}6\cdot10^{28}$ с$^{-1}\cdot$см$^{-3}$,

$\sigma=1/(\sqrt{2}n\lambda)=0{,}283\cdot10^{-14}$ см^2,

$r=\sqrt{\sigma/\pi}=3\cdot10^{-8}$ см.

417. $\lambda\approx3D/\bar{v}=3D\sqrt{\pi/(8kT)}\approx1{,}3\cdot10^{-5}$ см.

418. Решение. При течении на бесконечно малом участке трубы dx жидкость можно считать несжимаемой и применить к такому течению формулу Пуазейля

$$Q=-\frac{\pi\rho r^4}{8\eta}\frac{dP}{dx}.$$

Исключая плотность ρ с помощью уравнения Клапейрона, получим

$$Q=-\frac{\pi\mu r^4}{8\eta RT}P\frac{dP}{dx}.$$

Так как при стационарном течении величина Q постоянна вдоль всей трубы, а величина η зависит только от температуры и при изотермическом течении остается постоянной, то после интегрирования получим

$$Q=\frac{\pi\mu r^4}{16\eta RT}\frac{P_1^2-P_2^2}{l}. \tag{418.1}$$

419. $\eta = \frac{\pi P_2 D^4 \tau}{128 l V}\left[\ln\frac{(P_1-P_2)(P_2+P_3)}{(P_3-P_2)(P_1+P_2)}\right]^{-1} \approx 14\cdot 10^{-5}$ дин·с/см^2,

$$d = \left(\frac{m\bar{v}}{3\sqrt{2}\pi\eta}\right)^{1/2} = 3{,}8\cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

420. $d = \left(\frac{c_v m v \sqrt{2}\,(t_1-t_2)}{0{,}72 i^2 R \ln(r_2/r_1)}\right)^{1/2} = 2{,}3\cdot 10^{-8}$ см.

421. $\varkappa \sim T^{1/2}$. Для плоскопараллельного слоя

$$T^{3/2} = T_1^{3/2} + \frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{l}\,x;$$

для сферического слоя

$$T_R^{3/2} = \frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{R_1 - R_2}\,\frac{R_1 R_2}{R} + \frac{T_1^{3/2} R_1 - T_2^{3/2} R_2}{R_1 - R_2};$$

для цилиндрического слоя

$$T_R^{3/2} = T_1^{3/2} - \frac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R/R_1).$$

422. $P < 1{,}1\cdot 10^{-3}$ мм рт. ст.

424. Решение. Так как расстояние между стенками мало по сравнению с их размерами, то при расчете стенки можно считать плоскими. Температуру одной из стенок можно принять равной температуре окружающего воздуха T_0, а другой — температуре жидкого воздуха T. Молекулы, отражающиеся от наружной стенки, назовем «горячими», а молекулы, отражающиеся от внутренней стенки, — «холодными». Обозначим числа таких молекул в 1 см^3 через n_0 и n, а их скорости — через v_0 и v соответственно. Число молекул, отражающихся от 1 см^2 горячей стенки в одну секунду, равно $^1/_4 n_0 v_0 = {}^1/_4 nv$. Эти молекулы передают холодной стенке тепло $^1/_4 n_0 v_0 \cdot {}^5/_2 kT_0$; обратно уносится тепло $^1/_4 n_0 v_0 \cdot {}^5/_2 kT$. Следовательно,

$$M = \frac{5}{8q} n_0 v_0\, kS\,(T_0 - T)\,\tau.$$

Давление оставшегося газа, если бы он имел температуру T_0, равно $P = (n + n_0)\,kT_0$. Окончательно нетрудно получить

$$M = \frac{5}{8q} SP \sqrt{\frac{3RT}{\mu T_0}}\,(\sqrt{T_0} - \sqrt{T})\,\tau \approx 110 \text{ г.}$$

425. Направим ось X вдоль трубы. Тогда $N = -SD\,dn/dx$, где S — площадь поперечного сечения трубы. Так как поток N один и тот же на протяжении всей трубы, то $|dn/dx| = n/l$. Заменив в формуле $D = {}^1/_3 \bar{v}\lambda$ величину λ на $2r$, получим $D = {}^2/_3 \bar{v} r$ и далее

$$N = \frac{2}{3}\frac{n}{l}\pi \bar{v} r^3.$$

426. Так как столкновений между молекулами нет, то потоки частиц N_1 и N_2 в прямом и обратном направлениях совершенно независимы, и полный поток N представится их разностью:

$$N = N_1 - N_2 = \frac{2}{3}\pi \bar{v} r^3 \frac{n_1 - n_2}{l} \qquad (426.1)$$

(формула Кнудсена).

427. Газ будет перетекать в сосуд с более высокой температурой:

$$m = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}\,\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}\,M = \frac{2}{15}M.$$

428. $n = n_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = \dfrac{3Vl}{2\pi a^3 \bar{v}} = 5\cdot 10^3\ \text{с} = 83{,}4$ мин.

429. $n = n_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \dfrac{12Vl}{\pi D^3 \bar{v}} = 3\cdot 10^4\ \text{с} = 5\cdot 10^2\ \text{мин} = 8{,}33$ ч.

430. $n_1 = \dfrac{n_{10}\tau_1 + n_{20}\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + \dfrac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}(n_{10} - n_{20})e^{-t/\tau}$,

$n_2 = \dfrac{n_{20}\tau_2 + n_{10}\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} + \dfrac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}(n_{20} - n_{10})e^{-t/\tau}$,

где $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_2}$, $\tau_1 = \dfrac{3V_1 l}{2\pi a^3 \bar{v}}$, $\tau_2 = \dfrac{3V_2 l}{2\pi a^3 \bar{v}}$.

431. $N \geqslant 2/\lg(\mu_2/\mu_1)$.

432. Решение. При оценке эффекта можно предположить, что одна шестая молекул воздуха движется направо, а одна шестая — налево. Молекулы, движущиеся параллельно плоскости диска, можно не принимать во внимание. Скорости молекул v будем считать одинаковыми. Пусть диск движется равномерно со скоростью u менее нагретой поверхностью вперед. Число ударов, испытываемое квадратным сантиметром этой поверхности в одну секунду: $\dfrac{n}{6}(v + u)$. Для оценки эффекта можно предположить, что в системе отсчета, движущейся вместе с диском, молекула отражается со скоростью v_2, соответствующей температуре T_2 поверхности. В неподвижной системе скорость отразившейся молекулы будет $v_2 + u$, а изменение скорости $v_2 + u + v$. Следовательно, давление газа на менее нагретую поверхность

$$P_2 = \frac{nm}{6}(v + u)(v_2 + u + v).$$

Аналогично, давление на более нагретую поверхность

$$P_1 = \frac{nm}{6}(v - u)(v_1 + v - u).$$

При установившемся движении $P_2 = P_1$. Из этого условия нетрудно получить

$$u = \frac{v_1 - v_2}{4v + v_1 + v_2}\,v \approx \frac{v_1 - v_2}{6} \approx \frac{v}{12}\,\frac{v_1^2 - v_2^2}{v^2} \approx \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\,\frac{T_1 - T_2}{T} \approx 1{,}4\ \text{м/с}.$$

433. $\varphi=\frac{\pi\eta\omega}{2fh}=81°$.

434. Решение. Рассмотрим кольцо на вращающемся диске с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r+dr$. С площади этого кольца ежесекундно отражаются $^1/_4 nv\cdot 2\pi r\,dr$ молекул. Каждая из них уносит момент количества движения $mr^2\omega$, который передается неподвижному диску. Полный момент количества движения, передаваемый в одну секунду неподвижному диску, легко найти интегрированием. Приравнивая его моменту силы $f\varphi'$, действующему со стороны закрученной нити, получим для угла закручивания

$$\varphi'=\frac{3\pi p}{8vf}\omega R^4=\frac{3}{4}\frac{Ph}{\eta v}\varphi\approx 1°,$$

где φ — значение угла закручивания, соответствующее тому случаю, когда расстояние между дисками мало по сравнению с длиной свободного пробега молекулы. (См. предыдущую задачу.)

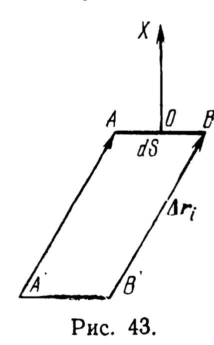


Рис. 43.

435. Решение. Пусть в однородной жидкости в отсутствие внешних силовых полей распределены тождественные броуновские частицы с концентрацией $n(x)$, меняющейся только в направлении оси X. Вычислим диффузионный поток Γ таких частиц через произвольное сечение, перпендикулярное к оси X. Возьмем в этом сечении бесконечно малую площадку dS (рис. 43). Выделим группу броуновских частиц, которые за время τ смещаются на один и тот же вектор $\Delta\boldsymbol{r}_i$. Пусть будет велика не только полная концентрация броуновских частиц n, но и концентрация их $n_i(x)$ в каждой группе. Число частиц i-й группы dN_i, проходящих через площадку dS за время τ, будет равно числу их в косом цилиндре $ABB'A'$ с основанием AB и образующей Δr_i, т. е.

$$dN_i=\int n_i(x)\,dV.$$

Линейные размеры площадки dS можно выбрать малыми по сравнению с Δr_i. Тогда элемент объема dV можно представить в виде $dV=dS\,dx$ и написать

$$dN_i=dS\int n_i(x)\,dx=dS\int\limits_{-\Delta x_i}^{0} n_i(x_0+\xi)\,d\xi,$$

где x_0 — координата центра O площадки dS. Выбрав τ, а следовательно, и Δx_i достаточно малыми, разложим функцию $n_i(x_0+\xi)$ по

степеням ξ и оборвем это разложение на линейном члене. Тогда

$$dN_i = n_i(0)\,dS \int\limits_{-\Delta x_i}^{0} d\xi + \left(\frac{dn_i}{dx}\right)_{x=x_0} dS \int\limits_{-\Delta x_i}^{0} \xi\,d\xi,$$

или после интегрирования

$$dN_i = dS\left[n_i\,\Delta x_i - \frac{1}{2}\frac{dn_i}{dx}(\Delta x_i)^2\right].$$

Аргумент x_0 мы опустили, предполагая, что концентрация n_i и ее производная dn_i/dx берутся в центре площадки dS.

Избыток dN броуновских частиц, проходящих через площадку dS в положительном направлении оси X, над числом частиц, проходящих в противоположном направлении, найдется суммированием предыдущего выражения по всем группам частиц:

$$dN = dS\sum_i n_i\,\Delta x_i - \frac{dS}{2}\sum_i \frac{dn_i}{dx}(\Delta x_i)^2.$$

Среднее значение первой суммы равно нулю. Действительно, концентрации n_i относятся к центру площадки dS, а смещения броуновских частиц в положительном и отрицательном направлениях равновероятны. Для вычисления второй суммы заметим, что по определению среднего

$$n\overline{\Delta x^2} = \sum n_i(\Delta x_i)^2.$$

Величины Δx_i, как независимые параметры, не зависят от x. Средний квадрат смещения $\overline{\Delta x^2}$ также не может зависеть от x ввиду однородности жидкости и отсутствия силовых полей. Поэтому дифференцирование предыдущего соотношения по x дает

$$\overline{\Delta x^2}\,\frac{dn}{dx} = \sum \frac{dn_i}{dx}(\Delta x_i)^2.$$

В результате для среднего значения $d\overline{N}$ получаем

$$d\overline{N} = -dS\,\frac{\overline{\Delta x^2}}{2}\,\frac{dn}{dx}.$$

Чтобы найти средний диффузионный поток броуновских частиц Γ, надо эту величину разделить на dS и τ. Таким путем получаем

$$\Gamma = -\frac{\overline{\Delta x^2}}{2\tau}\,\frac{dn}{dx}.$$

Отсюда видно, что выравнивание концентраций броуновских частиц можно рассматривать как процесс диффузии с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Delta x^2}}{\tau}. \qquad (435.1)$$

По смыслу вывода под $(\overline{\Delta x^2})$ следует понимать «среднее по совокупности частиц». Однако в силу одинаковости последних и отсутствия взаимодействия между ними это среднее может быть заменено «средним по времени» для одной частицы.

436. Плотность суммарного потока частиц в положительном направлении оси X: $nBf - D\,\partial n/\partial x$, где f — результирующая силы тяжести и выталкивающей силы гидростатического давления, действующая на броуновскую частицу (ось X направлена вертикально вниз). Приравнивая это выражение нулю и принимая во внимание, что $n = n_0 \exp\left\{\frac{fx}{kT}\right\}$, получим окончательно

$$D = kTB$$

(формула Эйнштейна).

437. $\overline{\Delta x^2} = 2kTB\tau = \frac{kT}{3\pi\eta a}\tau$.

438. $\sqrt{\overline{\Delta^2}} = \sqrt{\overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2}} = \sqrt{\frac{2kT\tau}{3\pi\eta a}} \approx 10$ мкм.

439. $N = \frac{RT\tau}{3\pi a\eta\,\overline{\Delta x^2}} \approx 6{,}02\cdot 10^{23}$.

440. $\overline{|\Delta x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\overline{\Delta x^2}} = 2\sqrt{\frac{kTB\tau}{\pi}}$.

441. $\sqrt{\overline{r^2}} = \sqrt{\overline{x^2} + \overline{y^2}} = 2\sqrt{\frac{hkT}{mg}} = 1{,}3\cdot 10^{-2}$ см. Радиус капельки $a = [3m/(4\pi\rho)]^{1/3} \approx 1{,}36\cdot 10^{-3}$ см, т. е. велик по сравнению с длиной свободного пробега молекулы воздуха ($\sim 10^{-5}$ см). Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = mg\rho/(6\pi\eta^2) \approx 0{,}15$, т. е. мало по сравнению с единицей. Условия применимости формулы Стокса выполняются.

442. $Ne = \frac{2RT\,(v_1 + v_2)}{E\,\overline{(\Delta x)^2}}\tau$.

443. $N = 5{,}88\cdot 10^{23}$.

444. $\tau \approx \frac{R^2}{6D} \approx \frac{R^2}{2lv} \approx \frac{R^2}{2lc} \approx 1{,}4\cdot 10^{14}$ с $\approx 4{,}4\cdot 10^{6}$ лет, где v — скорость космической частицы, близкая к скорости света в вакууме c. (См. решение задачи 435.)

445. Звук, длина волны которого порядка средней длины свободного пробега.

446. Р е ш е н и е. Отклонения на большие углы электрона при его столкновении с ионом могут происходить, когда кинетическая энергия налетающего электрона $mv^2/2$ сравнима с потенциальной энергией взаимодействия этих частиц Ze^2/r при их максимальном сближении (Ze — заряд иона). Приравнивая эти энергии, находим r,

а затем и приближенное выражение для сечения:

$$\sigma = \pi r^2 \approx 4\pi \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \approx \left(\frac{Ze^2}{kT}\right)^2. \qquad (446.1)$$

При этом мы не учитывали взаимодействий на далеких расстояниях, сопровождающихся отклонениями на малые углы. В результате накопления малых отклонений при таких взаимодействиях импульс электрона может измениться на конечную величину. В типичных случаях далекие пролеты более существенны, чем близкие. Однако они не сказываются на виде формулы (446.1), а только на численном коэффициенте — в формуле (446.1) появляется численный множитель порядка 10—20. Поэтому при грубых оценках, а также при качественном рассмотрении явлений можно пользоваться выражением (446.1).

447. Для плазмы применимы рассуждения, встречающиеся в элементарной теории электропроводности металлов. По формуле Друде $\Lambda = \frac{e^2 nl}{2m\bar{v}}$, где $l = 1/(n\sigma)$ — средняя длина свободного пробега электрона, $\bar{v} \approx \sqrt{3kT/m}$ — средняя скорость его теплового движения, n — число электронов в 1 см³. Подставляя вместо σ выражение, полученное в предыдущей задаче, получим

$$\Lambda \approx \frac{(kT)^{3/2}}{2\sqrt{3m}\,e^2} = 6{,}73 \cdot 10^7 T^{3/2}\ \text{с}^{-1} = 7{,}47 \cdot 10^{-5} T^{3/2}\ \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Более точная (но все же приближенная) теория, учитывающая многократные рассеяния, дает

$$\Lambda = \frac{1{,}55 \cdot 10^8}{L} T^{3/2}\ \text{с}^{-1} = \frac{1{,}72 \cdot 10^{-4}}{L} T^{3/2}\ \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1},$$

где L — так называемый кулоновский логарифм:

$$L = \begin{cases} 9 - {}^1/_2 \ln n + {}^3/_2 \ln T & \text{при} \quad T \leqslant 16 \cdot 10^4\ \text{К}, \\ 15 - {}^1/_2 \ln n + \ln T & \text{при} \quad T \geqslant 16 \cdot 10^4\ \text{К}. \end{cases}$$

Здесь n — концентрация плазмы, т. е. число электронов в 1 см³. В широком диапазоне температур и концентраций кулоновский логарифм может считаться величиной постоянной. В этом диапазоне удельная электрическая проводимость не зависит от концентрации плазмы и пропорциональна $T^{3/2}$.

448. $T \approx 1{,}7 \cdot 10^7$ К $= 1{,}5$ кэВ.

449. К плазме применим закон Видемана — Франца, который дает

$$\varkappa = \frac{3k^2}{e^2} T\Lambda \sim T^{5/2}.$$

Теплопроводность плазмы не зависит от ее концентрации и пропорциональна $T^{5/2}$.

§ 7. Реальные газы

450. $\left(P+\frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT.$

451.

$$P_{кр}=\frac{a}{27b^2},\quad T_{кр}=\frac{8a}{27Rb},\quad V_{кр}=3b,\quad \frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}}=\frac{8}{3}. \qquad (451.1)$$

Последнее отношение называется критическим коэффициентом. В действительности критические коэффициенты для различных газов имеют несколько разные значения и все они немного больше 8/3.

452. $\left(\pi+\frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}\tau.$

453. $T_В={}^{27}/_8\,T_{кр}=3{,}375\,T_{кр}.$

При решении задачи произведение PV удобнее рассматривать как функцию плотности газа ρ и искать условие, при котором производная $d(PV)/d\rho$ обращается в нуль при $\rho=0$.

454. $V_{кр}=3RT_{кр}/(8P_{кр})=128$ см^3.

455.

Газ	$V_{кр}$, см^3	$P_{кр}$, атм	$T_{кр}$, К	$T_В$, К
Гелий	71,1	2,24	5,17	17,5
Водород	79,8	12,6	12,6	32,7
Азот	117,0	33,5	128	433
Кислород	95,4	49,8	155	524
CO_2	128	73,3	304	1000

456. $b=39{,}4$ см^3/моль, $a=1{,}39\cdot10^6$ атм·см^6/моль^2.

457. $\rho_{кр}=\frac{\mu}{V_{кр}}=\frac{8\mu P_{кр}}{3RT_{кр}}\approx 0{,}18$ г/см^3. Опыт дает $\rho_{кр}=0{,}209$ г/см^3.

458. $P=\frac{a}{V^2}\approx 17\,000$ атм.

459. Для уравнения Бертло:

$$P_{кр}^2=\frac{Ra}{216b^3},\quad T_{кр}^2=\frac{8a}{27Rb},\quad V_{кр}=3b,$$

$$\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}}=\frac{8}{3},\quad T_В=\sqrt{\frac{a}{Rb}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}T_{кр}.$$

Для уравнения Клаузиуса:

$$P_{кр}^2=\frac{Ra}{216(b+c)^3},\quad T_{кр}^2=\frac{8a}{27R(b+c)},\quad V_{кр}=3b+2c,$$

$$\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}}=\frac{8(b+c)}{3b+2c},\quad T_В=\sqrt{\frac{a}{Rb}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{b+c}{b}}\,T_{кр}.$$

Для первого уравнения Дитеричи:

$$P_{\text{кр}}=\frac{a}{4e^2b^2},\quad T_{\text{кр}}=\frac{a}{4Rb},\quad V_{\text{кр}}=2b,$$

$$\frac{RT_{\text{кр}}}{P_{\text{кр}}V_{\text{кр}}}=\frac{e^2}{2}\approx 3{,}7,\quad T_{\text{В}}=\frac{a}{Rb}=4T_{\text{кр}},$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Для второго уравнения Дитеричи:

$$P_{\text{кр}}=\frac{a}{4\,(4b)^{5/3}},\quad T_{\text{кр}}=\frac{15ab}{4R\,(4b)^{5/3}},\quad V_{\text{кр}}=4b,$$

$$\frac{RT_{\text{кр}}}{P_{\text{кр}}V_{\text{кр}}}=\frac{15}{4}=3{,}75,$$ температуры Бойля не существует.

460. $\gamma_T=\dfrac{V^2\,(V-b)^2}{RTV^3+2a\,(V-b)^2}$.

461. $\alpha=\dfrac{V-b}{TV_0\left[1-\dfrac{2a\,(V-b)^2}{RTV^3}\right]}$.

462. Решение. Для простоты примем, что масса вещества равна единице. Тогда удельные объемы жидкости и газа изобразятся длинами отрезков NL и NG, а удельный объем вещества в двухфазном состоянии — длиной отрезка NM. Если массы жидкости и газа равны соответственно $m_{\text{ж}}$ и $m_{\text{г}}$, то $V_M=NM=m_{\text{ж}}\cdot NL+m_{\text{г}}\cdot NG$. Искомое соотношение получится отсюда, если принять во внимание, что $m_{\text{ж}}+m_{\text{г}}=1$.

463. При переходе с ветви LAC на прямолинейный участок CL в точке C происходит необратимый процесс превращения физически однофазного состояния вещества в двухфазное. К такому процессу равенство Клаузиуса неприменимо. Надо пользоваться неравенством.

464. $C_P=\infty$. Достаточно заметить, что в указанной области изобары совпадают с изотермами.

465. Решение. В критической точке $(\partial P/\partial V)_T=(\partial^2P/\partial V^2)_T=0$. Поэтому первый член разложения Тейлора в окрестности этой точки имеет вид

$$P-P_{\text{кр}}=\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3P}{\partial V^3}\right)_{\text{кр}}(V-V_{\text{кр}})^3+\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\text{кр}}(T-T_{\text{кр}}).$$

Вычислив производные из уравнения Ван-дер-Ваальса и воспользовавшись известными выражениями критических параметров через a и b, получим

$$P-P_{\text{кр}}=-\frac{9}{16}\frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{кр}}^4}(V-V_{\text{кр}})^3+\frac{3}{2}\frac{R}{V_{\text{кр}}}(T-T_{\text{кр}}).$$

Вместо объема V введем плотность $\rho=\mu/V$, где μ — относительная молекулярная масса. Использовав еще уравнение гидростатики

$P-P_{\text{кр}}=-\rho_{\text{кр}}gh$, получим в рассматриваемом приближении

$$\frac{\rho-\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{кр}}}=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{6\frac{\mu gh+{}^3/_2 R(T-T_{\text{кр}})}{RT_{\text{кр}}}}.$$

Высота h отсчитывается от того уровня, где плотность вещества равна критической, причем положительным считается направление вверх. В частности, при $T=T_{\text{кр}}$

$$\frac{\rho-\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{кр}}}=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{6\mu gh}{RT_{\text{кр}}}}.$$

Вдали от критической точки газ можно считать идеальным. В этом случае для относительного изменения плотности с высотой мы имели бы

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=-\frac{\mu gh}{RT}.$$

При одинаковых температурах и относительных молекулярных массах эта величина меньше предыдущей в $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{RT}{\mu gh}\right)^{2/3}$ раз. Для воздуха ($\mu=28{,}8$, $T_{\text{кр}}=132{,}5$ К) при высоте $h=1$ см $\alpha\approx 8700$, $(\rho-\rho_{\text{кр}})/\rho_{\text{кр}}\approx -1/100$.

466. $V=\frac{8P_{\text{кр}}V_1\mu}{3RT_{\text{кр}}\rho}=2{,}8$ см^3, где $T_{\text{кр}}=374+273=647$ К.

467. Все дело в большой сжимаемости вещества в окрестности критической точки (см. задачу 465). На расстояниях порядка сантиметра плотность вещества заметно меняется под действием силы тяжести (гравитационный эффект). Благодаря этому при достижении критической температуры на определенной высоте внутри ампулы может установиться критическая плотность вещества.

468. $q=\int\limits_{v_{\text{ж}}}^{v_{\text{п}}}\frac{a}{v^2}\,dv=a\left(\frac{1}{v_{\text{ж}}}-\frac{1}{v_{\text{п}}}\right)\approx\frac{a}{v_{\text{ж}}}=v_{\text{ж}}P_i=\frac{P_i}{\rho}.$

469. $U=\nu\left(C_VT-\frac{a\nu}{V}\right)$, где ν — число молей, а постоянные C_V и a отнесены к одному молю.

470. $U=\nu\left(C_{V\infty}T-\frac{a\nu}{V}\right)$, где $C_{V\infty}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме в состоянии бесконечного разрежения, когда газ ведет себя как идеальный. Недостаток решения в том, что оно не дает доказательства независимости C_V от объема газа.

471. $\Delta T=\frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)=0{,}25$ °C.

472. Газ охладится. Его температура и давление будут:

$$T'=T-\frac{a}{2C_V}\frac{(V_2-V_1)^2}{V_1V_2(V_1+V_2)},\quad P'=\frac{2RT'}{V_1+V_2-2b}-\frac{4a}{(V_1+V_2)^2}.$$

473. $T'-T=-\frac{a\nu}{2VC_V}=-0{,}0056$ °C, где $\nu=0{,}041$ — число молей.

474. $T'-T=\frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)=\frac{9RT_{\text{кр}}V_{\text{кр}}}{8C_V}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)=-0{,}013$ °C, где $V_1=20$ л и $V_2=200$ л — соответствующие молярные объемы.

475. $Q=a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$.

476.
$$Q=\frac{C_V}{R}\left\{\left(P+\frac{a}{V_2^2}\right)(V_2-b)-\left(P+\frac{a}{V_1^2}\right)(V_1-b)\right\}+ +a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right).$$

477. Решение. Согласно первому началу термодинамики теплота испарения одного моля жидкости равна $q=U_{\text{п}}-U_{\text{ж}}+A$, где $U_{\text{п}}$ и $U_{\text{ж}}$ — внутренние энергии пара и жидкости, а $A=P(V_{\text{п}}-V_{\text{ж}})$ — работа против постоянного внешнего давления. Величина $U_{\text{п}}-U_{\text{ж}}$ найдется из уравнения $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P=\frac{a}{V^2}$, которое дает

$$U_{\text{п}}-U_{\text{ж}}=a\left(\frac{1}{V_{\text{ж}}}-\frac{1}{V_{\text{п}}}\right).$$

Таким образом,

$$q=V_{\text{п}}\left(P-\frac{a}{V_{\text{п}}^2}\right)-V_{\text{ж}}\left(P-\frac{a}{V_{\text{ж}}^2}\right)=V_{\text{п}}\left(\frac{RT}{V_{\text{п}}-b}-\frac{2a}{V_{\text{п}}^2}\right)- -V_{\text{ж}}\left(\frac{RT}{V_{\text{ж}}-b}-\frac{2a}{V_{\text{ж}}^2}\right).$$

478. $C_P-C_V=\frac{R}{1-\frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}$.

479. $S=\nu\left[R\ln\left\{\frac{V-\nu b}{\nu}\right\}+\int\frac{C_V(T)}{T}dT+\text{const}\right]$, где аддитивная постоянная в квадратных скобках от числа частиц не зависит. Если теплоемкость C_V не зависит от температуры, то

$$S=\nu\left[R\ln\left\{\frac{V-\nu b}{\nu}\right\}+C_V\ln T+\text{const}\right].$$

480. $T(V-b)^{n-1}=\text{const}$, где $n=1+\frac{R}{C_V-C}$.

483.

$$\frac{\Delta T}{\Delta P}=\frac{\frac{bRT}{(V-b)^2}-\frac{2a}{V^2}}{C_P(\partial P/\partial V)_T}. \qquad (483.1)$$

484.

$$\frac{\Delta T}{\Delta P}=\frac{\frac{2a}{RT}-b}{C_P}, \qquad (484.1)$$

$$T_{\text{инв}}=2a/(Rb)={}^{27}/_4\,T_{\text{кр}}.$$

485. $\Delta T=\dfrac{b\Delta P}{C_P}>0$, где ΔP мало, причем $\Delta P<0$.

486. $\Delta T=\dfrac{2a\,\Delta P}{RTC_P}$, где ΔP мало и отрицательно.

487. $T<T_{инв}=34{,}4$ К. При дросселировании гелия под давлением 30 атм, когда формула (484.1) неприменима, инверсия наблюдается при 14 К.

488.

Газ	$T_{инв}$, К		ΔT, К
	вычислено	измерено	
Водород	220	200	+0,008
Воздух	870	794	—0,026
CO_2	2060	2050	—0,75

489. $\dfrac{bRT}{(V-b)^2}-\dfrac{2a}{V^2}=0$.

490. $T=\dfrac{2a}{Rb}\left(1-\dfrac{b}{V}\right)$.

491. $\Delta T=\dfrac{1}{C_P}\left(\dfrac{RT}{V-b}b-\dfrac{2a}{V}\right)$. Водород: $\Delta T=16$ К, воздух: $\Delta T=-41$ К, CO_2: $\Delta T=160$ К.

492. Гипербола: $T=\dfrac{2a}{Rb}\dfrac{V-b}{V}$ (рис. 44 и 45). Асимптоты, изображенные пунктирными прямыми, пересекают ось ординат в точках инверсии дифференциального эффекта Джоуля—Томсона.

493. Решение. При медленном вытекании состояние вещества в сосуде может считаться равновесным. А так как сосуд теплоизолирован, то удельная (а, следовательно, и молярная) энтропия газа в сосуде должна оставаться неизменной. При обратимом адиабатическом расширении с совершением внешней работы газ охлаждается. По достижении некоторой температуры дальнейшее понижение давления газа сопровождается не только понижением температуры, но и конденсацией его в жидкость. Этот процесс также является равновесным и идет без изменения энтропии. Для изменения энтропии моля вещества при переходе из начального (газообразного) состояния в конечное (жидкое) состояние можно написать

$$\Delta S=\int\left(C_V\frac{dT}{T}+P\frac{dV}{T}\right)-\frac{q}{T_1}.$$

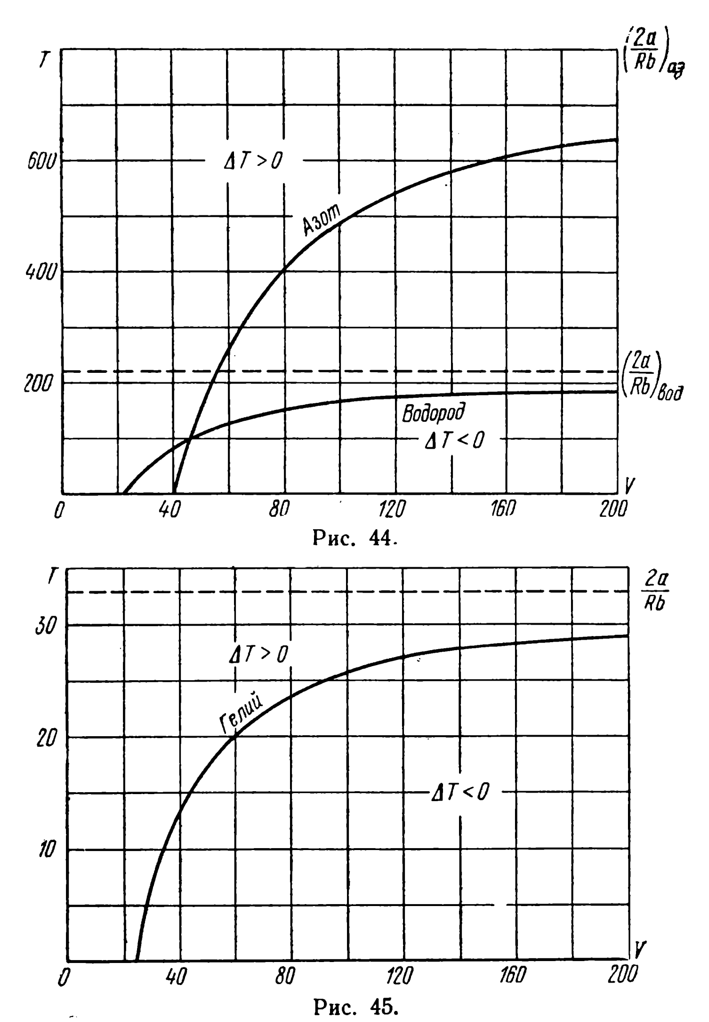


Рис. 44.

Рис. 45.

Подставив сюда

$$P\,dV = R\,dT - V\,dP = R\,dT - RT\,\frac{dP}{P}$$

и учтя соотношение $C_P = C_V + R$, получим

$$\Delta S = C_P \ln\frac{T_1}{T_0} - R\ln\frac{P_1}{P_0} - \frac{q}{T_1} = R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_1}{T_0} - \ln\frac{P_1}{P_0} - \frac{q}{RT_1}\right).$$

Приравнивая ΔS нулю, находим

$$P_0 = P_1\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{q/(RT_1)} \approx 100 \text{ атм}.$$

§ 8. Поверхностное натяжение

494. $\sigma = \frac{mg}{\pi d} \approx 70$ дин/см, где m — масса капли.

495. Коромысло весов, на котором подвешен капилляр, опустится.

496. $\sigma = \frac{(2\pi R - l)\,ES}{2\pi R^2}$.

497. $T \sim \sqrt{\rho r^3/\sigma}$. Применить метод размерностей.

498. $l \sim \sqrt{\rho g h/\sigma}$.

499. Решение. Рассмотрим пленку жидкости и проведем с ней бесконечно малый цикл Карно. Будем откладывать по горизонтальной оси площадь пленки F, а по вертикальной оси — поверхностное натяжение σ (рис. 46). При постоянной температуре поверхностное натяжение также постоянно. Поэтому на нашей диаграмме изотермы изобразятся горизонтальными прямыми. Начальное состояние пленки характеризуется точкой *1*. Приведем пленку в тепловой контакт с нагревателем, температура которого равна температуре пленки в состоянии *1*. Затем квазистатически растянем пленку до состояния *2*. На это надо затратить работу. Работа самой пленки отрицательна и равна $A_1 = -\sigma(T_1)\,\Delta F$, где ΔF — приращение площади пленки при растяжении по изотерме *12*. При изотермическом растяжении к пленке надо подводить тепло. Величина подведенного тепла $Q_1 = q\,\Delta F$. В состоянии *2* изолируем пленку от нагревателя и адиабатически бесконечно мало растянем ее до состояния *3*, в котором пленка примет температуру холодильника T_2. Предполагается, что температуры T_1 и T_2 отличаются друг от друга бесконечно мало. В состоянии *3* приведем пленку в тепловой контакт с холодильником и изотермически переведем ее в состояние *4*. Поверхность пленки уменьшится на ΔF, и она совершит положительную работу $A_2 = \sigma(T_2)\,\Delta F$. Из состояния *4* вернем пленку в исходное состояние *1*. Работой пленки на адиабатах *23* и *41* можно пренебречь, как величиной более высокого порядка малости. Полная работа, совершенная пленкой во время кругового процесса, равна

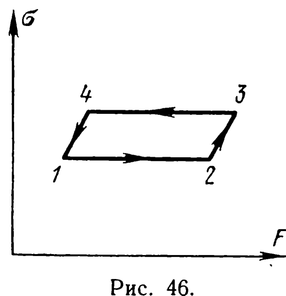


Рис. 46.

$$A = A_1 + A_2 = [\sigma(T_2) - \sigma(T_1)]\,\Delta F = \frac{d\sigma}{dT}(T_2 - T_1)\,\Delta F.$$

По теореме Карно

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для A и Q_1, после сокращения получим

$$\frac{d\sigma}{dT}=-\frac{q}{T}. \qquad (499.1)$$

500. Решение. По первому началу термодинамики $\delta Q=dU-\sigma\,dF$, где F — площадь поверхности пленки. Если процесс — изотермический, то согласно (499.1) $\delta Q=q\,dF=-T\,(d\sigma/dT)\,dF$. Таким образом, при изотермическом увеличении поверхности пленки $dU=(\sigma-T\,d\sigma/dT)\,dF$. За параметры, определяющие состояние пленки, можно принять площадь F и температуру T. Энергия, приходящаяся на единицу поверхности пленки, от величины F не зависит. Поэтому

$$U=(\sigma-T\,d\sigma/dT)\,F.$$

501. $dT=-\frac{q}{c_F}\,dF$, где c_F — теплоемкость единицы поверхности пленки при постоянном значении F, а q определяется формулой (499.1). При адиабатическом расширении пленка охлаждается.

502. Считая $c_F=c_v h$ (c_v — удельная теплоемкость воды), получим

$$\Delta T=\frac{2T}{c_v h}\,\frac{d\sigma}{dT}\approx-0{,}02\ \text{К}.$$

Коэффициент «2» учитывает то обстоятельство, что пленка — двухсторонняя.

503. $\Delta T=\frac{16\pi r^2\,(\sigma-T\,d\sigma/dT)}{5\nu R}=3{,}4\cdot10^{-3}$ К.

504. Решение. Подставим в формулу (499.1) $q=T\,\Delta S$, где ΔS — приращение энтропии пленки при увеличении ее поверхности на единицу. Получим

$$d\sigma/dT=-\Delta S.$$

Согласно теореме Нернста при абсолютном нуле температуры все процессы идут без изменения энтропии, т. е. $\Delta S=0$. Отсюда следует, что при абсолютном нуле температур производная $d\sigma/dT$ обращается в нуль.

505. $P=4\sigma/d\approx196$ Н/см^2.

506. $P=8\sigma/d\approx400$ дин/см$^2\approx0{,}29$ мм рт. ст.

507. $h\approx2\sigma/(\rho g a)=35$ см.

508. $M\approx\pi\sigma D^2/(gd)\approx900$ г. Масса наливаемой жидкости от ее плотности не зависит.

511. $r=\frac{2\sigma}{a\rho\eta}\approx\frac{\sigma}{5\rho g h}\approx1{,}5\cdot10^{-3}$ см.

512. Решение. Величина d_2 находится из уравнения

$$\left(P_0+\rho g h+\frac{4\sigma}{d_1}\right)d_1^3=\left(P_0+\frac{4\sigma}{d_2}\right)d_2^3,$$

где P_0 — атмосферное давление. Так как $4\sigma/d_1\ll P$ и тем более $4\sigma/d_2\ll P_0$, то в нулевом приближении эти члены можно отбросить

(т. е. пренебречь поверхностным натяжением). Это дает $d_2 = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ **см.** Найденное значение можно уточнить по методу последовательных приближений. В первом приближении $d_2 = 5{,}23 \cdot 10^{-3}$ см.

513. $\Delta T > 4\sigma T/(Pr)$.

514. $P = 8P_0 + 24\sigma/r$.

515. $C - C_P = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3} R \cdot 10^{-4} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$ кал/(моль·К).

516. Время t связано с радиусом пузыря соотношением

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4}(R_0^4 - R^4).$$

Пузырь исчезнет через

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} R_0^4 = 7{,}2 \cdot 10^3 \text{ с} = 2\text{ч}.$$

517. $t = \frac{2}{7a^2}\sqrt{\frac{2P\mu}{\sigma RT}}\, r_0^{7/2} \approx 630$ с $= 10{,}5$ мин, где R — универсальная газовая постоянная. (Ср. с ответом предыдущей задачи.)

518. $R_2 - R_1 = \rho g d^3/(4\sigma) \approx 0{,}28$ мм.

519. Решение. Давление внутри пузыря $P = P_{\text{нар}} + 4\sigma/r$. Дифференцируя при постоянном наружном давлении $P_{\text{нар}}$ и полагая $r = r_0$, $\sigma = \sigma_0$, получим

$$dP = \frac{4d\sigma}{r_0} - \frac{4\sigma_0 dr}{r_0^2}.$$

По известной формуле $d\sigma = -\frac{q_0}{T_0} dT$. Исключая $d\sigma$, получим

$$dP = -\frac{4q_0}{r_0 T_0} dT - \frac{4\sigma_0}{r_0^2} dr.$$

Так как масса газа внутри пузыря постоянна, то $\frac{Pr^3}{T} = \frac{P_0 r_0^3}{T_0}$; отсюда

$$\frac{dP}{P_0} + \frac{3dr}{r_0} - \frac{dT}{T_0} = 0.$$

Исключая отсюда и из предыдущего соотношения величину dP, получим окончательно

$$\left(\frac{dr}{dT}\right)_{T=T_0} = \frac{r_0}{T_0} \frac{4q_0 + r_0 P_0}{3r_0 P_0 - 4\sigma_0}.$$

520. $\sigma = \frac{gDh\rho}{4} \approx 80$ дин/см.

521. $h_1 - h_2 = \frac{4\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2}$.

522. $\Delta(h_1 - h_2) = \frac{4\Delta\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} \approx 24{,}2$ мм.

523. $h=\dfrac{P+\rho g l+\dfrac{2\sigma}{r}-\sqrt{\left(P+\rho g l+\dfrac{2\sigma}{r}\right)^2-\dfrac{8\sigma\rho g l}{r}}}{2\rho g}\approx$

$$\approx\frac{2\sigma l}{r\left(P+\rho g l+\dfrac{2\sigma}{r}\right)},$$

где P — атмосферное давление.

524. $h=\dfrac{2\sigma\cos\theta}{d\rho g}=3$ см.

525. $h=\dfrac{\sigma\cos\theta}{\rho g\sin(\alpha/2)}\dfrac{1}{x}\approx\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g\alpha}\dfrac{1}{x}$.

526. Решение. Капля примет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью. Кривизной сечения этой поверхности плоскостью, параллельной пластинкам, можно пренебречь. Радиус кривизны нормального к нему сечения $r=d/2$. Средняя кривизна боковой поверхности диска

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{d}.$$

Давление жидкости между дисками меньше атмосферного на $\Delta P=2\sigma/d$. Площадь диска $S=m/(\rho d)$, где ρ — плотность жидкости. Пластинки будут прижиматься друг к другу с силой

$$F=S\Delta P=\frac{2m\sigma}{\rho d^2}=1{,}46\cdot10^9\ \text{дин}=1{,}46\cdot10^4\ \text{Н}.$$

527. $F=\dfrac{2\sigma\rho\cos\theta}{m}\pi^2R^4=630$ Н, где m — масса ртути.

528. $F=\dfrac{2\sigma^2 l\cos^2\theta}{\rho g d^2}\approx 10$ Н.

529. Решение. В случае смачивания жидкость между пластинками поднимается (рис. 47, *а*). Давление в поднявшейся части

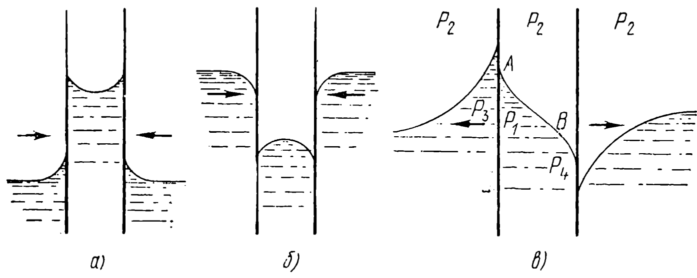


Рис. 47.

жидкости становится меньше давления окружающей атмосферы. Атмосферное давление стремится прижать пластинки друг к другу. В случае несмачивания (рис. 47, *б*) давление жидкости снаружи

пластинок больше давления воздуха между ними. Появляется разность давлений, стремящаяся сблизить пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда левая пластинка смачивается жидкостью, а правая не смачивается (рис. 47, *в*). Если пластинки расположены достаточно близко друг к другу, то поверхность жидкости между ними ни в одной точке не становится горизонтальной. Она имеет точку перегиба где-то между пластинками. Вследствие этого жидкость между пластинками поднимется ниже у левой пластинки и опустится меньше у правой пластинки, чем наружная жидкость. С этим обстоятельством и связано в рассматриваемом случае появление отталкивания между пластинками. Давление жидкости между пластинками в точке A равно давлению наружной жидкости P_3 на той же высоте. Давление воздуха P_2 больше P_1, так как поверхность жидкости у левой пластинки обращена к воздуху вогнутой стороной. Давление P_3 убывает с высотой, тогда как P_2 остается практически постоянным. Поэтому разность давлений $P_2 - P_3$ стремится переместить левую пластинку влево. В точке B давление жидкости P_4 больше P_2, так как поверхность жидкости в этой точке обращена к воздуху выпуклой стороной. Тем более это справедливо для давления ниже этой точки. В результате разность давлений $P_4 - P_2$ будет перемещать правую пластинку вправо. Действием рассмотренных сил объясняется концентрация в кучи пузырьков воздуха, листьев, мелких щепок и прочих смачиваемых тел, плавающих на поверхности воды в стоячих водоемах.

530. Решение. Примем за ось X прямую, перпендикулярную к длинной стороне пластинки и лежащую на горизонтальной поверхности жидкости, а за ось Y — вертикальную прямую, касающуюся правой цилиндрической поверхности жидкости. Пусть x и y означают текущие координаты точки, лежащей на искомой поверхности. Давление внутри жидкости на уровне точки A (см. рис. 30) равно $P = P_0 - \rho g y$, где P_0 — атмосферное давление. То же давление можно выразить по формуле Лапласа $P = P_0 - \sigma K$, где K — абсолютное значение кривизны поверхности жидкости в точке A. Следовательно,

$$\rho g y = \sigma K. \qquad (530.1)$$

По определению кривизна $K = -d\varphi/ds$, где ds — элемент длины дуги. Элемент дуги ds считается положительным, когда он проходит в направлении снизу вверх. Он связан с dx и dy соотношениями: $dx = ds \cos\varphi$, $dy = ds \sin\varphi$. Таким образом,

$$K = -\frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi = -\frac{d\varphi}{dy}\sin\varphi.$$

Подставляя эти выражения в (530.1), получим два уравнения:

$$\rho g y\, dy + \sigma \sin\varphi\, d\varphi = 0, \qquad (530.2)$$

$$\rho g y\, dx + \sigma \cos\varphi\, d\varphi = 0. \qquad (530.3)$$

Интегрируя (530.2) с использованием начального условия $\varphi=\pi$ при $y=0$, получим

$$y=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}\cos(\varphi/2). \qquad (530.4)$$

Подстановка этого выражения в (530.3) приводит к уравнению

$$dx=-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\cos(\varphi/2)\,d\varphi+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\frac{d\varphi}{\cos(\varphi/2)},$$

интегрирование которого с использованием начального условия $x=0$ при $\varphi=\pi/2$ дает

$$x=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin(\varphi/2)\right]+\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\ln\frac{1+\sin(\varphi/2)}{[1-\sin(\varphi/2)](\sqrt{2}+1)}. \qquad (530.5)$$

Формулы (530.4) и (530.5) выражают уравнение искомой поверхности в параметрической форме.

531. Решение. Минимальная толщина столба жидкости $D=MN$ при максимально возможной высоте поднятия h (рис. 30) определится из требования $\varphi=0$ при $y=h$. Подставляя в формулу (530.5) $x=(a-D)/2$, $\varphi=0$, получим

$$D=a-2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]=a-1{,}066\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \qquad (531.1)$$

Если $a<1{,}066\sqrt{\sigma/(\rho g)}$, то минимальное значение D равно нулю. В этом случае предельное значение угла $\varphi=0$ не достигается.

Пусть $a>1{,}066\sqrt{\sigma/(\rho g)}$. Тогда максимально возможная высота поднятия определится из формулы (530.2), если положить $\varphi=0$:

$$h=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}. \qquad (531.2)$$

Разность атмосферного и гидростатического давлений на пластинку направлена вниз и равна $\rho g h$. Поэтому

$$F=q+\rho g h a=q+2a\sqrt{\rho g\sigma}. \qquad (531.3)$$

Рассмотрим теперь второй случай: $a<1{,}066\sqrt{\sigma/(\rho g)}$. В этом случае

$$h=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}\cos(\varphi/2), \qquad (531.4)$$

где φ определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{a}{2}=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin(\varphi/2)\right]+\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\ln\frac{1+\sin(\varphi/2)}{[1-\sin(\varphi/2)](\sqrt{2}+1)}. \qquad (531.5)$$

При нахождении F необходимо учесть, что в рассматриваемом случае пластинку тянет вниз дополнительная сила поверхностного натяжения $2\sigma\sin\varphi$. С учетом этой силы

$$F=q+2a\sqrt{\rho g\sigma}\cos(\varphi/2)+2\sigma\sin\varphi. \qquad (531.6)$$

Если $a \ll \sqrt{\sigma/(\rho g)}$, то вторым членом в этой формуле можно пренебречь. Пренебрегая также в (531.5) членом $a/2$, находим $\varphi=\pi/2$. Таким образом, при $a \ll \sqrt{\sigma/(\rho g)}$

$$F=q+2\sigma, \quad h=\sqrt{2\sigma/(\rho g)}.$$

532. Решение. Примем за ось Y вертикальную прямую, касающуюся боковой поверхности жидкости, а за ось X — горизонтальную прямую, перпендикулярную к длине пластинки и касающуюся поверхности жидкости в бесконечности (рис. 48). Уравнения боковой поверхности жидкости будут:

$$x=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos(\varphi/2)\right]+\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\ln\frac{1+\cos(\varphi/2)}{[1-\cos(\varphi/2)](\sqrt{2}+1)}, \tag{532.1}$$

$$y=-2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\sin(\varphi/2). \tag{532.2}$$

Минимальное расстояние $D=MN$ при максимально возможной глубине погружения пластинки $|y|_{\text{макс}}$ определится из требования $\varphi=\pi$, которое дает

$$D=a-2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho \sigma}}(\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1))=a-1{,}066\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \tag{532.3}$$

Если $a<1{,}066\sqrt{\sigma/(\rho g)}$, то $D=0$, и предельное значение угла $\varphi=\pi$ не достигается.

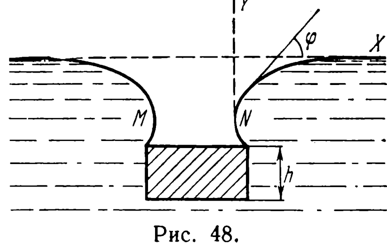


Рис. 48.

Рассмотрим сначала случай $a>1{,}066\sqrt{\sigma/(\rho g)}$. В этом случае максимальная глубина погружения верхнего основания пластинки определится из (532.2), если положить $\varphi=\pi$. Она равна $|y|_{\text{макс}}=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}$. При этом на основание пластинки будет действовать направленная вверх разность давлений $\rho g(h+|y|_{\text{макс}})$, которая должна быть уравновешена весом пластинки. Максимальная толщина пластинки, при которой она еще не утонет, определится из условия $\rho g(h+|y|_{\text{макс}})=\rho_0 g$, которое дает

$$h=\frac{2}{\rho_0-\rho}\sqrt{\frac{\sigma\rho}{g}}. \tag{532.4}$$

Теперь рассмотрим случай $a<1{,}066\sqrt{\sigma/\rho g}$. В этом случае

$$|y|_{\text{макс}}=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\sin(\varphi/2), \tag{532.5}$$

где φ определяется из уравнения

$$\frac{a}{2}=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos(\varphi/2)\right]+\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\ln\frac{1+\cos(\varphi/2)}{[1-\cos(\varphi/2)](\sqrt{2}+1)}. \qquad (532.6)$$

Для максимальной толщины пластинки получаем

$$h=\frac{2}{\rho_0-\rho}\sqrt{\frac{\sigma\rho}{g}}\sin(\varphi/2)+\frac{2\sigma\sin\varphi}{ga(\rho_0-\rho)}. \qquad (532.7)$$

Если $a \ll \sqrt{\sigma/(\rho g)}$, то первым членом справа можно пренебречь. При этом, как видно из (532.6), $\varphi=\pi/2$, и мы находим

$$h=\frac{2\sigma}{ga(\rho_0-\rho)} \quad \text{или} \quad 2\sigma=gah(\rho_0-\rho), \qquad (532.8)$$

т. е. вес пластинки уравновешивается поверхностным натяжением и архимедовой подъемной силой.

533. Пренебрегая кривизной окружности, ограничивающей пластинку, получим

$$F \approx 2\pi r^2\sqrt{\rho g\sigma} \approx 1{,}1 \text{ Н}.$$

534. $h=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\theta)}$.

535. $h=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\sin\frac{\theta}{2}=3{,}6$ мм.

536. Решение. В точке A (рис. 49) поверхности жидкости и иголки тангенциально расходятся. На единицу длины иголки вверх

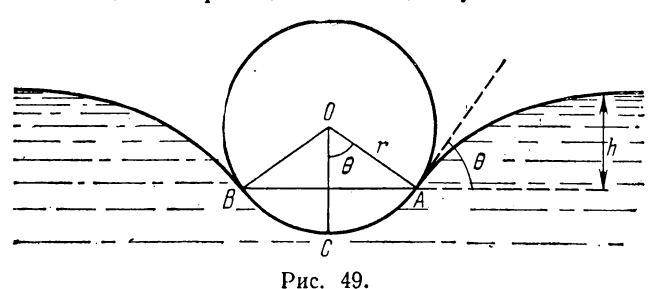


Рис. 49.

действует сила поверхностного натяжения $F_1=2\sigma\sin\theta$. Кроме того, на нее действует сила гидростатического давления, также направленная вверх. Если бы часть ACB иголки была заменена жидкостью, то сила гидростатического давления была бы равна $F_2=\rho gh\cdot AB=2\rho ghr\sin\theta$, где r — радиус иголки, а ρ — плотность жидкости. Благодаря тому, что часть ACB погружена в жидкость, на иголку дополнительно действует сила гидростатического давления F_3, равная

весу воды, вытесненной частью ACB, т. е. $F_3 = \rho g r^2 (\theta - \sin\theta\cos\theta)$. Сумма трех сил F_1, F_2 и F_3 должна равняться весу единицы длины иголки. Это дает

$$2\sigma\sin\theta + 2\rho g h r\sin\theta + \rho g r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta) = \rho_0 g \pi r^2.$$

Между углом θ и высотой h существует соотношение $h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\sin\frac{\theta}{2}$ (см. решение задачи 535), и предыдущее уравнение принимает вид

$$\left[\pi\rho_0 - \rho\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right] r^2 - 4r\sqrt{\frac{\rho\sigma}{g}}\sin\theta\sin(\theta/2) - \frac{2\sigma\sin\theta}{g} = 0. \quad (536.1)$$

Для D и H получаем

$$D = 2r\sin\theta + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[2\cos(\theta/2) + \ln\{\operatorname{tg}(\theta/4)\}\right] - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right), \quad (536.2)$$

$$H = 2r\sin^2(\theta/2) + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\sin(\theta/2). \quad (536.3)$$

После подстановки численных значений:

$$[24{,}5 - (\theta - 1/2\sin 2\theta)]\, r^2 - 1{,}091\sin\theta\sin(\theta/2)\, r - 0{,}1488\sin\theta = 0, \quad (536.4)$$

$$D = 2r\sin\theta + 1{,}091\cos(\theta/2) + 1{,}256\lg_{10}\{\operatorname{tg}(\theta/4)\} - 0{,}291. \quad (536.5)$$

(Предполагается, что здесь длины выражаются в сантиметрах.) Придавая θ различные значения, получим следующую таблицу:

$\theta°$	r, мм	H, мм	D, мм	$\theta°$	r, мм	H, мм	D, мм
0	0	0	—	80	0,955	4,29	—
10	0,328	0,481	—	90	0,990	4,85	1,98
20	0,471	0,975	—	100	1,005	5,35	1,91
30	0,583	1,49	—	110	1,001	5,82	1,68
40	0,680	2,03	—	120	0,977	6,20	1,24
50	0,763	2,58	—	130	0,922	6,45	0,65
60	0,840	3,15	—	139	0,846	6,59	0,04
70	0,903	3,72	—	139,5	0,842	6,60	0,0C

Наибольший радиус r получается при $\theta \approx 100°$ и равен приблизительно 1 мм. Если $r > 0{,}842$ мм, то существуют два положения равновесия иголки: одно при $\theta \lessapprox 100°$, другое при $\theta \gtrapprox 100°$. Если же

$r < 0{,}842$ мм, то существует только одно положение равновесия с $\theta \lessgtr 60^\circ$, так как в этом случае при $\theta \gtrless 60^\circ$ формула (536.5) дает для D отрицательное значение. Наибольшая глубина погружения H получается при $r \approx 0{,}842$ мм и равна приблизительно 6,60 мм.

537. Решение. Ввиду симметрии пленка является поверхностью вращения вокруг прямой, на которой лежат центры колец. Пересечем поверхность пленки произвольной плоскостью, проходящей через эту ось, и примем ее за координатную плоскость XY (рис. 50). Так как давления по обе стороны пленки одинаковы, то ее полная кривизна $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ должна равняться нулю. Радиус кривизны R_1 нормального сечения пленки, лежащего в плоскости XY, определяется формулой $\frac{1}{R_1}=-\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ (величина отрицательная). Радиус кривизны R_2 перпендикулярного к нему нормального сечения легко определить с помощью известной из дифференциальной геометрии теоремы Менье, согласно которой $y=R_2 \cos\alpha$, где α — угол между плоскостью нормального сечения и координатной плоскостью YZ. Подставляя значение $\cos\alpha$, получим $R_2=y\sqrt{1+y'^2}$ (величина положительная). Таким образом, дифференциальное уравнение, определяющее форму осевого сечения пленки, принимает вид

Рис. 50.

$$\frac{y''}{1+y'^2}-\frac{1}{y}=0. \qquad (537.1)$$

Введем подстановку $y'=\operatorname{sh}\theta$. Тогда $1+y'^2=\operatorname{ch}^2\theta$, $y=\frac{\operatorname{ch}\theta}{d\theta/dx}$. Дифференцируя последнее соотношение и принимая во внимание, что $y'=\operatorname{sh}\theta$, находим $d^2\theta/dx^2=0$, откуда $\theta=ax+b$, где a и b — постоянные. Они определятся из граничных условий: $y=R$ при $x=\pm h$. Очевидно, $b=0$, так как ввиду симметрии y должна быть четной функцией от x. Окончательно:

$$y=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\{ax\}=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax}), \qquad (537.2)$$

где постоянная a определяется уравнением

$$aR=\operatorname{ch}\{ah\}. \qquad (537.3)$$

Поверхность пленки получается вращением кривой (537.2) вокруг оси X. Она называется катеноидом. Уравнение (537.3) легче всего

исследовать и решать графически. Применяя этот метод, нетрудно доказать, что оно имеет решение только при условии $R/h > 1{,}51$. Значит, чтобы между кольцами могла образоваться пленка, необходимо, чтобы расстояние между ними $2h$ не превышало $(2/1{,}51)\,R = 1{,}33R$.

538. Радиус цилиндрической пленки r вдвое меньше радиуса сферических частей пленки R.

539. Решение. Форма боковой поверхности пленки определится из требования, чтобы полная кривизна ее $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ оставалась постоянной. (В отличие от задачи 537 эта постоянная, вообще говоря, отлична от нуля.) Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\text{const}\equiv 2K. \qquad (539.1)$$

(Обозначения те же, что и в задаче 537.) Вводя снова подстановку $y = \operatorname{sh}\theta$, получим

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\theta}\,y\right)=2Ky, \qquad (539.2)$$

откуда

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\theta}=Ky+\frac{A}{y}, \qquad (539.3)$$

где A — постоянная интегрирования. Определив отсюда $\operatorname{sh}\theta$ с помощью формулы $\operatorname{sh}^2\theta=\operatorname{ch}^2\theta-1$ и вспомнив обозначение $y=\operatorname{sh}\theta$, найдем

$$x=\int\frac{Ky^2+A}{\sqrt{y^2-(Ky^2+A)^2}}\,dy+B, \qquad (539.4)$$

где B — вторая постоянная интегрирования. Постоянные интегрирования A и B определяются из граничных условий: $y=R$ при $x=\pm h$. Формула (539.4) совместно с этими граничными условиями и решает задачу.

Если $A=0$, то интегрирование в (539.4) выполняется элементарно и дает

$$(x-a)^2+y^2=\frac{1}{K^2},$$

где a — постоянная интегрирования. При $a=0$ получается окружность радиуса $R=1/K$ с центром в начале координат. Это решение соответствует случаю, когда радиус колец обращается в нуль. При $a=1/K$ получается окружность с центром в $x=1/K$, а при $a=-1/K$ — с центром в $x=-1/K$. Обе окружности имеют один и тот же радиус $R=1/K$ и касаются друг друга в начале координат. Эти решения соответствуют также случаю, когда расстояние между кольцами равно удвоенному радиусу кольца.

540. Решение. В уравнении (539.1) пренебрежем квадратом первой производной y'. Тогда для кривизны боковой поверхности пленки $2K$ получим

$$2K=\frac{1}{y}-y''.$$

Положим $y=r+\eta$, где $\eta\ll r$. Пренебрегая квадратом η, можем написать $\frac{1}{y}=\frac{1}{r}-\frac{\eta}{r^2}$; тогда

$$2K=\frac{1}{r}-\eta''-\frac{\eta}{r^2}. \qquad (540.1)$$

Поскольку кривизна $2K$ постоянна, интегрирование этого уравнения дает

$$\eta=A\cos\frac{x}{r}+B\sin\frac{x}{r}+C,$$

где A и B — постоянные интегрирования, а постоянная C равна $r=2Kr^2$. Постоянная B равна нулю, так как функция $\eta(x)$ должна быть четной. При $x=\pm h$ должно быть $\eta=0$, т. е. $A\cos\frac{h}{r}+C=0$. Следовательно,

$$\eta=A\left(\cos\frac{x}{r}-\cos\frac{h}{r}\right).$$

Таким образом, образующая цилиндра принимает форму синусоиды. Для кривизны боковой поверхности из (540.1) получаем

$$2K=\frac{1}{r}+\frac{A}{r^2}\cos\frac{h}{r}.$$

При увеличении давления внутри пузыря кривизна $2K$ должна увеличиваться. Если $h/r<\pi/2$, т. е. длина пузыря $2h$ меньше πr, то $\cos(h/r)>0$. Поэтому постоянная A должна быть положительной. Значит, при увеличении давления внутри пузыря его боковая поверхность будет выпучиваться. Если же $h/r>\pi/2$, т. е. длина пузыря $2h$ больше πr, то $\cos(h/r)<0$. В этом случае постоянная отрицательна, и при увеличении давления боковая поверхность пузыря будет вдавливаться.

§ 9. Фазовые превращения. Растворы

541. Решение. Так как при нагревании объем системы не меняется, то работа не совершается. Поэтому искомое количество тепла будет равно приращению внутренней энергии системы и, следовательно, не будет зависеть от способа перехода системы из начального состояния в конечное. Осуществим этот переход в два этапа.

1. Нагреем воду от 0 до 100 °С так, чтобы испарения не было. Для этого потребуется подвести тепло $Q_1 = 18 \cdot 100 = 1800$ кал/моль.

2. Испарим воду при постоянной температуре $t = 100$ °С. Для этого потребуется подвести тепло $Q_2 = U_п - U_ж$, где $U_п$ и $U_ж$ — внутренние энергии моля водяного пара и воды при температуре 100 °С и атмосферном давлении. Для определения $U_п - U_ж$ воспользуемся первым началом термодинамики $q = U_п - U_ж + A$, где q — теплота испарения, отнесенная к одному молю ($q = 539 \cdot 18 = 9710$ кал/моль), а A — работа против постоянного внешнего давления ($A = PV_п = RT = 1{,}98 \cdot 373 = 739$ кал/моль). Таким образом,

$$Q_2 = U_п - U_ж = q - A = 8970 \text{ кал/моль},$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = 1800 + 8970 = 10\,770 \text{ кал/моль}.$$

542. $A = \mu q (T_1 - T_2)/T_2 = 13{,}8$ кДж, где μ — относительная молекулярная масса воды.

543. $t_0 = t_1 + \frac{Plq}{\varkappa} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi R T_1}} = -5{,}5$ °С, где μ — относительная молекулярная масса воды.

544. $\alpha = \gamma_T = \infty$, $C_P = \pm \infty$.

545. Решение. Пусть точка A на диаграмме P, v (рис. 51) изображает состояние одного грамма жидкости при температуре T и давлении P, равном давлению ее насыщенного пара при этой температуре. Будем сообщать системе тепло таким образом, чтобы давление и температура оставались постоянными. Тогда жидкость будет испаряться и притом так, что в любой момент времени над ней будет находиться насыщенный пар. Пусть B изображает состояние, в котором вся жидкость перешла в пар. Тогда теплота, полученная системой на изотерме AB, будет равна теплоте испарения q. Адиабатически понизим температуру пара на бесконечно малую величину dT (точка C), а затем по изотерме CD и адиабате DA вернем систему в начальное состояние. Работа, совершенная системой, равна площади параллелограмма $ABCD$. Выразив ее через $v_п$, $v_ж$ и dT и применив теорему Карно, нетрудно получить:

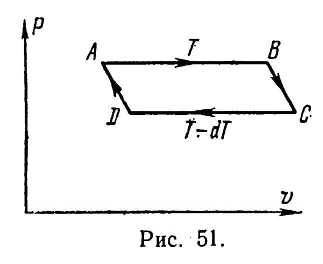


Рис. 51.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_п - v_ж)} \qquad (545.1)$$

(формула Клапейрона — Клаузиуса).

546. $\Delta T/\Delta P = T(v_ж - v_л)/q = -0{,}0075$ К/атм. Дьюар опытным путем нашел $-0{,}0072$ К/атм. Температуру тройной точки можно приближенно определить, приняв давление равновесного пара в тройной

точке равным нулю. Таким путем получаем, что тройная точка воды лежит выше точки плавления на 0,0075 К.

547. $\Delta T = \frac{T}{q} \Delta v \, \Delta P = 0{,}056$ К.

548. $P \approx \left(1 + \frac{q \, \Delta T}{\nu R T^2}\right) P_0 = 1{,}035$ атм, где q — удельная теплота парообразования, $\nu = 1/18$ — число молей в 1 г воды, P_0 — атмосферное давление.

549. $\Delta m \approx \frac{\mu V P}{R T^2} \left(\frac{q \mu}{R T} - 1\right) \Delta T \approx 0{,}075$ г, где $V \approx 4$ л — объем пара, P — его давление, R — универсальная газовая постоянная.

550. Решение. Удельная теплота возгонки $q = q_1 + q_2 = 676$ кал/г. Подставляя ее в уравнение Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_п - v_т)} \approx \frac{q}{T v_п}$$

и определив удельный объем водяного пара из уравнения $P v_п = \frac{1}{\mu} R T$, легко найти, что при $\Delta T = -1$ К $\Delta P = -0{,}38$ мм рт. ст., а давление насыщенного пара над льдом при $t = -1$ °C равно $P_{-1\,°C} = 4{,}20$ мм рт. ст.

551. $q_{исп} = \frac{R T^2}{\mu P} \left(\frac{dP}{dT}\right)_{возг} - q_{пл} \approx 103$ кал/К.

552. $q \approx T \frac{\Delta P}{\Delta T} \Delta V = 44$ кал/г (опыт дает $q = 46{,}4$ кал/г).

553. $q = \frac{R T^2}{\mu} \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dT}\right) = 50$ кал/г.

554. $\Delta T \approx \frac{P T}{q} (v_в - v_л) = -0{,}72$ °C, $\Delta m / m = c_л \Delta T / q = 0{,}0054$.

555. Из теоремы Нернста следует, что $q = 0$. Дальнейшее вытекает из уравнения (545.1).

557. Решение. При определении поверхностного натяжения надо иметь в виду, что жидкость находится в равновесии с ее насыщенным паром. Строго говоря, следовало бы говорить не о «поверхностном натяжении жидкости», а о поверхностном натяжении на границе раздела двух находящихся в равновесии фаз: жидкой и газообразной. При критической же температуре вещество не может находиться в двух фазах, а только в одной. Формально можно сказать, что обе фазы делаются одинаковыми. Поэтому не может быть границы раздела между ними, и поверхностное натяжение должно обращаться в нуль.

558.
$$P = P_0 \exp\left\{\frac{\mu q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}, \qquad (558.1)$$

где μ — относительная молекулярная масса жидкости, а P_0 — давление насыщенного пара при температуре T_0.

559. $P = AT^{-\mu a/R} \exp\left\{-\frac{q_0\mu}{RT}\right\}$, где R — газовая постоянная, μ — относительная молекулярная масса.

Значение постоянной A можно найти, зная температуру кипения жидкости при каком-либо давлении.

560. $T - T_0 \approx T_0 \Big/ \left(1 - \frac{RT_0}{\mu q} \ln 2\right) - T_0 \approx 26\,°\text{C}$.

561. $v_п = v_ж + \frac{q}{T}\frac{dT}{dP} \approx 1700$ см³/г.

562. Решение. Для приближенной оценки в уравнении

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{q}{Tv} \approx \frac{\mu q P}{RT^2}$$

заменим производную dP/dT отношением конечных приращений. Получим

$$\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{RT_1^2}{\mu q P_1},$$

где P_1 и P_2 — давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2. Давление пара в воздухе при температуре T_1 и относительной влажности f будет fP_1, а потому $P_2 = \frac{T_2}{T_1} fP_1$. Подставляя эти значения в предыдущее соотношение, найдем

$$T_2 - T_1 = \frac{f-1}{\mu q - fRT_1} RT_1^2 = -3{,}3\ \text{K}. \qquad (561.1)$$

Для нахождения более точного решения из формулы (558.1) получаем

$$\ln\left\{\frac{fT_2}{T_1}\right\} = \frac{\mu q}{RT_1T_2}(T_2 - T_1).$$

Подставляя численные значения и переходя к десятичным логарифмам, преобразуем это уравнение к виду

$$T_2 - T_1 = 0{,}124\, T_2 \lg\left\{\frac{fT_2}{T_1}\right\}. \qquad (561.2)$$

Для решения уравнения (561.2) применяем метод последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем $T_2 = T_1$. Пользуясь этим, находим первое приближение:

$$T_2 - T_1 = 0{,}124\, T_1 \lg f = -3{,}52\ \text{K}.$$

Вычислив отсюда T_2 и подставив в правую часть уравнения (561.2), найдем второе приближение:

$$T_2 - T_1 = -3{,}66705\ \text{K}.$$

Поступая так дальше, получим третье приближение:

$$T_2 - T_1 = -3{,}67313\ \text{K},$$

четвертое приближение:

$$T_2 - T_1 = -3{,}67360 \text{ К}.$$

С точностью до трех значащих цифр

$$T_2 - T_1 = -3{,}67 \text{ К}.$$

Таким образом, замена производной dP/dT отношением конечных приращений приводит к ошибке $\sim 10\%$.

563. Решение. Обозначим через q_{23} теплоту плавления, через q_{12} — теплоту испарения, через q_{13} — теплоту возгонки. Пренебрегая разностью значений q_{23}, q_{13} и q_{12} в тройной точке и в точке ($t = 0$ °С, $P = 1$ атм), можем написать $q_{23} = q_{13} - q_{12}$ и далее

$$q_{23} = \frac{RT_0}{\mu \Delta T}\left(T_1 \ln \frac{P_0}{P_{13}} - T_2 \ln \frac{P_{12}}{P_0}\right) \approx 81 \text{ кал/г},$$

где $T_0 = 273$ К, $T_1 = 263$ К, $T_2 = 283$ К, P_0, P_{13}, P_{12} — давления насыщенных паров при этих температурах, $\Delta T = T_0 - T_1 = T_2 - T_1$.

564. $T = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{R}{\mu q} \ln\left\{1 + \frac{2\sigma}{P_0 r}\right\}\right]^{-1} = 404$ К, где T_0 — температура кипения при нормальном атмосферном давлении P_0.

565. $\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{c\,(T_{10} - T_1)}{q} \approx 14\%$, где c — удельная теплоемкость воды, T_1 и T_{10} — температуры кипения воды при давлениях 1 и 10 атм соответственно.

566. Решение. Первое начало термодинамики для единицы массы пара можно записать в виде $\delta Q = di^{п} - v^{п}\, dP$, где $i^{п}$ — удельная энтальпия, а $v^{п}$ — удельный объем пара. Мы применяем это уравнение к процессу, в котором P не остается постоянным. Однако, если пар считать идеальным газом, то его энтальпия будет зависеть только от температуры. Тогда для любого квазистатического процесса $di^{п}/dT = c_P^{п}$. Поэтому для искомой удельной теплоемкости насыщенного пара получаем $c = c_P^{п} - v^{п}\, dP/dT$. Поскольку нагревание производится так, что пар все время остается насыщенным, производная dP/dT определяется уравнением Клапейрона — Клаузиуса, которое дает

$$c = c_P^{п} - \frac{q}{T}. \qquad (566.1)$$

Согласно классической теории молярная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении равна $C_P^{п} = 8$ кал/(моль·К), а удельная теплоемкость $c_P^{п} = 8/18 = 0{,}444$ кал/(г·К). Используя это значение, а также значение для q, получаем $c = -1$ кал/(г·К).

567. Решение. Рассуждая как при решении предыдущей задачи, находим

$$c=\frac{di^{\text{п}}}{dT}-\frac{q}{T}.$$

Для вычисления производной $di^{\text{п}}/dT$ пользуемся формулой

$$q=u^{\text{п}}-u^{\text{ж}}+P\,(v^{\text{п}}-v^{\text{ж}})=i^{\text{п}}-i^{\text{ж}}.$$

Поскольку это соотношение написано для процесса, в котором пар все время остается насыщенным, величины, входящие в него, могут зависеть только от температуры. Дифференцируя его по температуре, находим

$$\frac{di^{\text{п}}}{dT}=\frac{dq}{dT}+\frac{di^{\text{ж}}}{dT}.$$

Для жидкости $di^{\text{ж}}=c_P^{\text{ж}}\,dT+v^{\text{ж}}\,dP$, причем последним слагаемым можно пренебречь. В этом приближении $di^{\text{ж}}/dT=c_P^{\text{ж}}$, а потому

$$\frac{di^{\text{п}}}{dT}=c_P^{\text{ж}}+\frac{dq}{dT}.$$

Подставляя эту величину в выражение для c, получим

$$c=c_P^{\text{ж}}-\frac{q}{T}+\frac{dq}{dT}. \qquad (567.1)$$

Для воды при $T=373$ K эта формула дает $c=-1{,}07$ кал/(г·К), что отличается от ранее полученного значения на 7%.

568. При адиабатическом сжатии водяной пар становится насыщенным, при адиабатическом расширении — пересыщенным. (Получение пересыщенного водяного пара путем адиабатического расширения используется в камере Вильсона.)

569. Решение. Квазистатически и изотермически испарим жидкость при температуре T_1. Изменение энтропии в этом процессе

$$\Delta_1 S=\frac{q}{T_1}\,(m_2-m_1).$$

Затем будем квазистатически менять температуру пара и притом так, чтобы он все время оставался насыщенным. Элементарное количество тепла, которое требуется подводить к пару в этом процессе,

$$\delta Q=m_2 c\,dT=m_2\left(c_P^{\text{п}}-\frac{q}{T}\right)dT.$$

Так как $dS=\delta Q/T$, то интегрируя и пренебрегая при этом зависимостью q от T, найдем для соответствующего изменения энтропии

$$\Delta_2 S=m_2\left[c_P^{\text{п}}\ln\frac{T_2}{T_1}+q\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\right].$$

571. $t=\dfrac{P_0-P_1}{\dfrac{P_2-P_1}{t_2-t_1}+\dfrac{q}{T(v_1-v_2)}}=0{,}0075\ ^\circ\text{C},$

$$P=\frac{P_2-P_1}{t_2-t_1}t+P_1=4{,}582 \text{ мм рт. ст.}$$

572. Решение. Для наклона кривых равновесия в тройной точке (рис. 52) имеем

$$\frac{dP_{23}}{dT}=\frac{q_{23}}{T(v_3-v_2)}\approx\frac{q_{23}}{Tv_3},\quad \frac{dP_{13}}{dT}=\frac{q_{13}}{T(v_3-v_1)}\approx\frac{q_{13}}{Tv_3}.$$

Так как $q_{13}=q_{12}+q_{23}$, то $q_{13}>q_{23}$. Следовательно, кривая возгонки идет круче кривой испарения. В окрестности тройной точки кривые

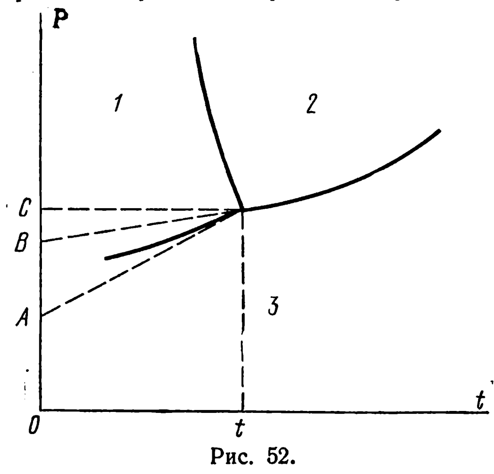


Рис. 52.

равновесия можно заменить касательными к ним. В этом приближении

$$P_1-P_2=AB=AC-BC=t\left(\frac{dP_{13}}{dT}-\frac{dP_{23}}{dT}\right),$$

откуда

$$P_1-P_2=\frac{q_{12}}{Tv_3}t=0{,}00033 \text{ мм рт. ст.}$$

573. $t=100{,}59\ ^\circ\text{C}$.

574.

$$1)\ P=P_0+\frac{v_ж}{v_п-v_ж}\sigma K, \qquad (574.1)$$

где P_0 — давление насыщенного пара над плоской, а P — над искривленной поверхностью жидкости, $v_ж$ и $v_п$ — удельные объемы жидкости и пара, K — средняя кривизна поверхности жидкости, σ — поверх-

ностное натяжение. Кривизна считается положительной для выпуклой и отрицательной для вогнутой поверхности.

$$2)\ \ln \frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_ж}{RT}(P_0 - P - \sigma K), \tag{574.2}$$

где μ — относительная молекулярная масса жидкости. Если $|P - P_0| \ll P_0$, то формула (574.2) переходит в более простую формулу (574.1). В другом предельном случае, когда соблюдаются условия $|\sigma K| \gg |P - P_0|$, $\mu v_ж |P - P_0| \ll RT$, формула (574.2) упрощается и принимает вид

$$P = P_0 \exp\left\{\frac{\mu v_ж}{RT}\sigma K\right\}. \tag{574.3}$$

575. 1) $P - P_0 \approx \frac{2\sigma}{r}\frac{v_ж}{v_п} \approx \frac{2\sigma}{r}\frac{\mu v_ж P_0}{RT} = 252$ дин/см$^2 = 0,19$ мм рт. ст.

2) По формуле (574.3) $P/P_0 = 2,9$. При столь малых размерах капли на формулу (574.3) следует смотреть как на оценочную.

576. Решение. Стационарный поток пара через любую сферическую поверхность радиуса r, концентрическую относительно поверхности капли, равен

$$q = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{d\rho}{dr} = \text{const},$$

откуда

$$\rho = \frac{q}{4\pi D r} + \rho_\infty.$$

Величину q можно найти из условия, что на поверхности капли ($r = a$) пар должен быть насыщенным. Это дает

$$q = 4\pi D a(\rho_н - \rho_\infty) = 4\pi D a \frac{\mu}{RT}(P_н - P_\infty),$$

где μ — относительная молекулярная масса пара, $P_н$ — давление насыщенного пара при температуре капли жидкости, P_∞ — парциальное давление паров жидкости вдали от капли. Подставляя значение q в предыдущую формулу, получим

$$\rho = \frac{a}{r}(\rho_н - \rho_\infty) + \rho_\infty. \tag{576.1}$$

577. Решение. Уравнение стационарной диффузии пара и соответствующие ему граничные условия имеют вид

$$\Delta\rho = 0, \quad \rho = \begin{cases} \rho_\infty & \text{при } r = \infty, \\ \rho_н & \text{на поверхности капли.} \end{cases}$$

Поток пара через любую замкнутую поверхность, окружающую каплю, не зависит от положения и формы поверхности. Взяв в качестве этой поверхности поверхность S самой капли, можем написать для

стационарного потока

$$q=-D\oint_S \frac{\partial\rho}{\partial n}\,dS,$$

где $\partial\rho/\partial n$ — производная ρ в направлении внешней нормали n к поверхности S.

Указанную задачу сопоставим с электростатической задачей о поле заряженного проводника с поверхностью S. Оно определяется потенциалом φ, удовлетворяющим условиям

$$\Delta\varphi=0, \quad \varphi=\begin{cases}\varphi_\infty & \text{при } r=\infty,\\ \varphi_S & \text{на поверхности } S\end{cases}$$

При этом заряд проводника Q равен

$$Q=-\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=C\,(\varphi_S-\varphi_\infty),$$

где C — электроемкость капли.

Обе задачи математически тождественны и имеют единственные решения. Поэтому $q=4\pi CD\,(\rho_н-\rho_\infty)$.

В частном случае сферы $C=a$, и мы получаем решение, предыдущей задачи.

578. $\tau_{исп}=\dfrac{a^2}{2D}\dfrac{\rho_ж}{(1-f)\,\rho_н}=\dfrac{a^2}{2D}\dfrac{RT}{(1-f)\,\mu P_н}\rho_ж.$

1) $\tau_{исп}\approx 37$ мин, 2) $\tau_{исп}\approx 0{,}13$ с.

579. Решение. Давление насыщенных паров у поверхности капли $P_{нa}$ определяется уравнением

$$P_{нa}-P_{н\infty}=\frac{RT}{\mu}\,(\rho_{нa}-\rho_{н\infty}).$$

(см. задачу 575). Но согласно формуле (576.1)

$$\rho=\rho_\infty+\frac{a}{r}\,(\rho_{нa}-\rho_{н\infty})=\rho_\infty\left[1+\frac{2\sigma\mu}{r\rho_ж RT}\right].$$

Таким образом, плотность пара ρ в рассматриваемом случае не зависит от радиуса капли a. Поток пара

$$q=-4\pi a^2 D\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=a}=\frac{8\pi\sigma\mu D\rho_\infty}{\rho_ж RT}$$

постоянен и также не зависит от радиуса a. Поэтому

$$\tau_{исп}=\frac{4\pi}{3q}\rho_ж a^3=\frac{\rho_ж^2 RT}{6\sigma\mu D\rho_\infty}a^3=\left(\frac{\rho_ж RT}{\mu}\right)\frac{a}{6\sigma DP_\infty}.$$

1) $\tau_{исп}\approx 225$ ч, 2) $\tau_{исп}\approx 0{,}8$ с.

580. Решение. По закону Рауля плотность ρ_a пара вблизи поверхности капли связана с соответствующей плотностью ρ_∞

вдали от капли соотношением

$$\frac{\rho_a-\rho_\infty}{\rho_\infty}=k.$$

Отношение k числа молей поваренной соли к числу молей растворителя может быть представлено в виде $k=Am/(\rho_\infty r^3)$, где A — постоянная. Тогда

$$\rho_a=\rho_\infty+\frac{Am}{r^3}.$$

Используя решение задачи 576, получим

$$a^5=a_0^5+5DAmt,$$

где a_0 — значение радиуса капли при $t=0$.

581. Решение. В состоянии термодинамического равновесия давление насыщенного пара в правом и левом сосудах на одной и той же высоте должно быть одинаковым (см. задачу 574). Отсюда с использованием уравнений гидростатики получаем

$$P=P_0+\frac{v_ж}{v_п-v_ж}\Pi, \qquad (581.1)$$

где P_0 — давление пара над поверхностью жидкости AB (т. е. в отсутствие нейтрального газа), P — над поверхностью CD (т. е. при наличии нейтрального газа), Π — давление нейтрального газа, $v_п$ и $v_ж$ — удельные объемы пара и жидкости. При решении предполагалось, что изменения плотности пара с высотой в пределах системы пренебрежимо малы по сравнению с плотностью самого пара. Повышение давления насыщенного пара с увеличением внешнего давления Π можно объяснить следующим образом. При возрастании Π возрастает противодавление жидкости, а с ним и число молекул жидкости, ударяющихся о ее поверхность. Это ведет к увеличению числа молекул, переходящих из жидкости в пар.

582. $\frac{\Delta P_п}{P_п}=\frac{\mu v_ж}{RT}\Delta P=0{,}08\%$.

583. Решение. Изотермическое увеличение внешнего давления на ΔP увеличивает удельный термодинамический потенциал льда на $\Delta\varphi_л=v_л\Delta P$, причем сжимаемостью льда можно пренебречь. Чтобы равновесие не нарушилось, на столько же должен возрасти удельный термодинамический потенциал пара. Но для пара

$$\Delta\varphi_п=v_п\Delta P_п=\frac{RT}{\mu}\frac{\Delta P_п}{P_п}.$$

Приравнивая оба выражения, получим

$$\Delta P=\frac{RT}{\mu v_л}\frac{\Delta P_п}{P_п}=10{,}5 \text{ атм}.$$

584. $R_{кр}=\frac{2\sigma_п}{P_п-P_ж}=9\cdot10^{-7}$ см. Легко показать, что в рассматриваемой задаче влияние кривизны поверхности пузырька на давление насыщенного пара несущественно.

585. Решение. Вдоль кривой плавления

$$\frac{dP}{dT}=\frac{S_ж-S_{тв}}{V_ж-V_{тв}}.$$

Подставляя сюда значения $S_ж$, $S_{тв}$ и интегрируя, получим уравнение кривой плавления:

$$P=P_1+\frac{R}{2\Theta}\,\frac{(T^2-T_1^2)-2\ln 2\cdot\Theta\,(T-T_1)}{V_ж-V_{тв}}$$

(парабола). Из этого уравнения находим $P_2=29$ атм. Молярная теплота плавления найдется по формуле

$$q=T\,(S_ж-S_{тв})=RT\left(\frac{T}{\Theta}-\ln 2\right).$$

Для температур T_1 и T_2 эта формула дает $q_1=-0{,}43$ Дж/моль, $q_2=0{,}18$ Дж/моль.

586. При фазовых переходах 1-го рода отношение c/a в точке Θ изменяется скачком. При фазовых переходах 2-го рода это отношение изменяется непрерывно и при температуре Θ обращается в единицу.

587. Решение. Докажем, например, второе соотношение. Для дифференциала энтропии каждой из фаз можно написать

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT+\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP=\frac{C_P}{T}\,dT-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP.$$

Если обе точки $(T,\ P)$ и $(T+dT,\ P+dP)$ лежат на кривой равновесия, то

$$d\,(S_2-S_1)=d\Delta S=0,$$

где S_1 — энтропия одной, а S_2 — энтропия другой фазы. Это значит, что

$$\frac{\Delta C_P}{T}\,dT-\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP=0,$$

откуда и следует доказываемое соотношение. Аналогично доказываются и остальные три соотношения.

588. Решение. Рассмотрим какую-либо порцию воздуха, насыщенного водяными парами. Массу воздуха в ней обозначим $m_в$, массу водяного пара $m_п$, массу жидкой воды $m_ж$. При адиабатическом поднятии энтропия рассматриваемой системы меняться не будет:

$$m_в s_в+m_п s_п+m_ж s_ж=\text{const}, \qquad (588.1)$$

где $s_в$, $s_п$, $s_ж$ — удельные энтропии воздуха, водяного пара и жидкой воды соответственно. При этом полное количество воды остается

постоянным: $m_п+m_ж=\text{const}$, так что $dm_ж=-dm_п$. Массу жидкой воды мы должны положить равной нулю, если в рассматриваемом состоянии вся вода существует в виде насыщенного водяного пара. Но, конечно, величина $dm_ж$ должна считаться отличной от нуля, так как при поднятии вверх водяные пары конденсируются в жидкие капли. Имея это в виду, из условия (588.1) получим

$$m_в ds_в + m_п ds_п + (s_п - s_ж)\, dm_п = 0.$$

Разность удельных энтропий выразим через удельную теплоту испарения $q=T(s_п-s_ж)$. Масса пара $m_п$ в рассматриваемой системе зависит только от температуры T, так что $dm_п=\frac{dm_п}{dT}dT$. Для дифференциала удельной энтропии воздуха $ds_в$, если учесть, что воздух может считаться идеальным газом, получим такое же выражение, как и в случае сухого воздуха:

$$ds_в=\frac{c_P^в}{T}\, dT-\frac{v_в}{T}\, dP_в.$$

То же можно написать и для водяного пара. Однако давление насыщенного пара зависит только от температуры, а потому

$$ds_п=\left[\frac{c_P^п}{T}-\frac{v_п}{T}\frac{dP_п}{dT}\right] dT.$$

Применим к воздуху уравнение гидростатики:

$$dP_в=-\rho_в g\, dz=-\frac{g}{v_в}\, dz.$$

С учетом всего этого получим

$$\left[c_P^в+\frac{m_п}{m_в}\left(c_P^п-v_п\frac{dP_п}{dT}+\frac{q}{m_п}\frac{dm_п}{dT}\right)\right]\frac{dT}{dz}=-g.$$

В этом соотношении $m_в$ и $m_п$, очевидно, можно заменить на плотности воздуха и водяного пара $\rho_в$ и $\rho_п$. Из уравнения Клапейрона $\rho=\mu P/(RT)$, а потому

$$\frac{m_п}{m_в}=\frac{\mu_п P_п}{\mu_в P_в},$$

$$\frac{1}{m_п}\frac{dm_п}{dT}=\frac{1}{\rho_п}\frac{d\rho_п}{dT}=\frac{T}{P_п}\frac{d}{dT}\left(\frac{P_п}{T}\right)=\frac{1}{P_п}\frac{dP_п}{dT}-\frac{1}{T}.$$

Выполнив соответствующую подстановку, получим

$$\left[c_P^в+\frac{\mu_п P_п}{\mu_в P_в}\left(c_P^п-v_п\frac{dP_п}{dT}-\frac{q}{T}+\frac{q}{P_п}\frac{dP_п}{dT}\right)\right]\frac{dT}{dz}=-g.$$

Наконец, воспользуемся уравнением Клапейрона—Клаузиуса в упрощенном виде:

$$\frac{dP_п}{dT}=\frac{q}{Tv_п}.$$

В результате найдем

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}}=\left(-\frac{g}{c_P^{\text{в}}}\right)\frac{1}{1+\frac{\mu_{\text{п}}P_{\text{п}}}{\mu_{\text{в}}P_{\text{в}}c_P^{\text{в}}}\left[c_P^{\text{п}}-\frac{2q}{T}+\frac{\mu_{\text{п}}}{R}\left(\frac{q}{T}\right)^2\right]}. \qquad (588.2)$$

В окончательной формуле (588.2) мы ввели у температурного градиента индекс «ад», опущенный в промежуточных расчетах.

Удельные теплоемкости воздуха и водяного пара при постоянном давлении вычислим по классической теории, считая воздух двухатомным, а водяной пар — трехатомным газами. Тогда

$$c_P^{\text{в}}=\frac{7R}{2\mu_{\text{в}}}, \qquad c_P^{\text{п}}=\frac{4R}{\mu_{\text{п}}}.$$

Учтем далее, что множитель $-g/c_{P_{\text{в}}}$ дает адиабатический градиент температуры для сухого воздуха, который мы обозначим посредством $(dT/dz)_{\text{ад, сух}}$. Тогда формула (588.2) представится в виде

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад}}=f\cdot\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ад, сух}}, \qquad (588.3)$$

где коэффициент f определяется выражением

$$\frac{1}{f}=1+\frac{8}{7}\frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{в}}}\left[1-\frac{q\mu_{\text{п}}}{2RT}+\left(\frac{q\mu_{\text{п}}}{2RT}\right)^2\right]. \qquad (588.4)$$

Теми же формулами можно пользоваться и в тех случаях, когда при охлаждении водяные пары не конденсируются, а превращаются в лед. Только в этих случаях под q следует понимать удельную теплоту возгонки, равную сумме удельных теплот парообразования и плавления.

Вычисленные значения коэффициента f при различных температурах для двух значений полного давления приведены в следующей таблице:

$P_{\text{в}}+P_{\text{п}}=760$ мм рт. ст.				$P_{\text{в}}+P_{\text{п}}=380$ мм рт. ст.	
t, °C	f	t, °C	f	t, °C	f
—30	0,94	10	0,47	—30	0,88
—25	0,91	15	0,40	—25	0,83
—20	0,86	20	0,33	—20	0,76
—15	0,81	25	0,28	—15	0,68
—10	0,74	30	0,23	—10	0,57
—5	0,65	40	0,16	—5	0,47
0	0,62	50	0,10	0	0,44
5	0,54				

Из таблицы видно, насколько существенно влияние влажности, если адиабатические процессы в атмосфере сопровождаются кондесацией или замерзанием водяных паров.

589. Решение. Пусть $m_{фв}$ и $m_{вф}$ означают относительные массы соответствующих растворов в точке C. Тогда $m_{фв}+m_{вф}=1$. Относительное содержание фенола в насыщенном растворе фенола в воде соответствует точке B и численно равно длине отрезка HB. Содержание же фенола в насыщенном растворе воды в феноле представляется длиной отрезка HA. Таким образом, относительное количество фенола в точке C будет

$$m_{фв}\cdot HB+(1-m_{фв})\cdot HA.$$

С другой стороны, та же величина представляется длиной отрезка HC. Приравнивая оба выражения, получим

$$m_{фв}=\frac{HA-HC}{HA-HB}=\frac{AC}{AB}.$$

Отсюда

$$m_{вф}=1-m_{фв}=\frac{AB-AC}{AB}=\frac{BC}{AB}.$$

Почленным делением получаем требуемый результат. (Ср. с решением задачи 462.)

590. Насыщенные растворы жидкости *1* в жидкости *2* и жидкости *2* в жидкости *1*, если их налить в один и тот же сосуд, образуют равновесную двухфазную систему. Первый раствор является одной, а второй — другой фазой этой системы. Если принять это во внимание, то требуемый результат легко получить, рассмотрев сообщающиеся сосуды, один из которых наполнен первым из указанных растворов, а другой — вторым. При этом следует пренебречь разницей давлений насыщенных паров над уровнями жидкостей в сосудах, обусловленной силой тяжести.

591. $\left(\frac{1}{c_{мол}}-1\right)\mu_0=\left(\frac{1}{c_{вес}}-1\right)\mu$, где μ — относительная молекулярная масса растворенного вещества, а μ_0 — относительная молекулярная масса растворителя.

592. $P_{осм}=\nu RT\approx 3{,}5$ атм, где ν — число молей сахара в единице объема раствора ($\nu\approx 50/342$ моль/л).

593. $T=\frac{P_{осм}}{(1+\alpha)\nu R}=303$ K, где $\nu\approx 20/58$ моль/л.

594. $\mu=mRT/(P_{осм}V)\approx 360$.

595. $P_{осм}=[1+(n-1)\alpha]\,mRT/(\mu V)$, где m — масса растворенного вещества в объеме V.

596. $P_{осм}=2\nu RT\approx 5{,}8$ атм, где $\nu\approx 10/85$ моль/л.

597. Дело в том, что осмотическое давление действует и на свободную поверхность жидкости. Это приводит к растяжению жидкости.

Возникающие силы натяжения компенсируют осмотическое давление. На стенки сосуда действует только гидростатическое давление.

598. $P_0 - P = \frac{\rho_п}{\rho_ж} P_{осм}$, где $\rho_п$ — плотность пара, $\rho_ж$ — плотность раствора. (Ср. с задачами 574, 581.)

599.

$$(P_0 - P)/P_0 = \nu'/\nu. \qquad (599.1)$$

Относительное понижение давления насыщенного пара растворителя над поверхностью слабого раствора нелетучего вещества равно отношению числа молей растворенного вещества к числу молей растворителя (закон Рауля).

600. $P = P_0(1 - \nu'/\nu) = 16{,}76$ мм рт. ст.

601. Решение. Пусть AB — малый участок кривой испарения для чистого растворителя (рис. 53). Его, а также отрезки других кривых можно в первом приближении считать прямолинейными. Кривая испарения $A'B'$ для раствора должна проходить ниже, так как упругость насыщенного пара над раствором меньше, чем над чистым растворителем. Поддерживая внешнее давление P постоянным (изобара AC), видим, что точка кипения A' при этом давлении для раствора лежит правее точки кипения A для чистого растворителя. Это значит, что температура кипения раствора выше температуры кипения чистого растворителя. Повышение температуры кипения $T' - T$ изображается длиной горизонтального отрезка AA'.

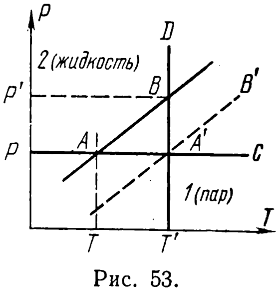


Рис. 53.

Для вычисления $T' - T$ через точку A' проведем изотерму $A'B$, которая пересечет кривую испарения чистого растворителя в точке B с координатами T', P'. Ордината P' изображает давление насыщенного пара чистого растворителя при температуре T', а потому по уравнению Клапейрона — Клаузиуса, если пренебречь удельным объемом жидкости,

$$\frac{P' - P}{T' - T} = \frac{q_{12}}{T v_п} = \frac{q \mu P}{RT^2},$$

где q_{12} — удельная теплота испарения, а μ — относительная молекулярная масса растворителя в парообразном состоянии. С другой стороны, по закону Рауля $(P' - P)/P' = \nu'/\nu$. Деля почленно это соотношение на предыдущее и пренебрегая в знаменателе различием P и P', находим

$$T' - T = \frac{\nu' R T^2}{\nu \mu q_{12}}, \qquad (601.1)$$

или

$$T'-T=\frac{P_{\text{осм}}T}{\nu\mu q_{12}}. \qquad (601.2)$$

602. Решение. Проведем через тройную точку A чистого растворителя бесконечно малые участки кривой испарения AC, плавления AB и возгонки AD (рис. 54). Кривая AD одновременно является кривой возгонки раствора, так как предполагается, что при замерзании раствора замерзает только чистый растворитель, а растворенное вещество в твердой фазе не появляется. Кривая возгонки DA поднимается круче кривой испарения AC (см. задачу 550). Кривая плавления из-за малости разности $v_ж - v_т$ поднимается настолько круто, что ее можно считать отрезком вертикальной прямой. Кривая испарения раствора $A'C'$, как выяснено в предыдущей задаче, идет ниже кривой испарения AC чистого растворителя. Ее пересечение с кривой возгонки AD определит положение тройной точки раствора A', а вертикальная прямая $A'B'$ будет кривой плавления раствора. Смещение прямой $A'B'$ относительно прямой AB, т. е. длина отрезка AN, дает понижение температуры плавления раствора, а длина отрезка AM — повышение температуры кипения раствора. Как видно из рисунка,

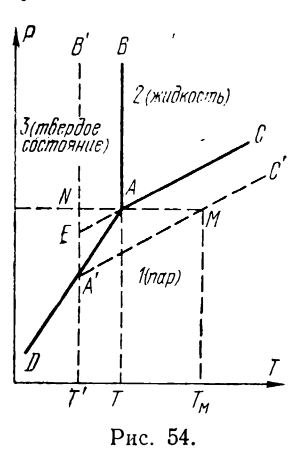


Рис. 54.

$$NA/AM = EA/A'E.$$

Из уравнения Клапейрона — Клаузиуса для возгонки и испарения следует

$$A'N/EN = q_{13}/q_{12}.$$

Отсюда

$$\frac{A'N-EN}{EN}=\frac{A'E}{EN}=\frac{q_{13}-q_{12}}{q_{12}}=\frac{q_{23}}{q_{12}}.$$

Замечая еще, что $AM = \nu' RT^2/(\nu\mu q_{12})$, $NA = T - T'$, получаем

$$T'-T=-\frac{\nu'}{\nu}\frac{RT^2}{\mu q_{23}}, \qquad (602.1)$$

или

$$T'-T=-\frac{P_{\text{осм}}T}{\nu\mu q_{23}}. \qquad (602.2)$$

603. $T' - T = 0{,}0156$ К.

604. $T' - T = -0{,}0543$ К.

605. $T_к = T_0 + \frac{nRT_0^2}{mq} = 101{,}75$ °С, где T_0 — температура кипения чистого растворителя, n — сумма числа молей растворенных веществ и m — масса растворителя.

606. $t = -\frac{q_2}{q_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \Delta t = -0{,}180$ °С.

607. $n = \frac{RT^2 m}{qMA\ \Delta T} = 2$, где R — универсальная газовая постоянная.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Основные единицы Международной системы (СИ)

Величина	Единица		
Наименование	Наименование	Обозначение	Определение
Длина	метр	м	Метр равен длине 1 650 763,73 волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86
Масса	килограмм	кг	Килограмм равен массе международного прототипа килограмма
Время	секунда	с	Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Сила электрического тока	ампер	А	Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Термодинамическая температура *)	кельвин **)	К	Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды

*) Измерения температуры производят по термодинамической и по практическим температурным шкалам.

**) Наименование кельвин и его обозначения применяются также для выражения интервала или разности температур.

Продолжение

Величина	Единица		
Наименование	Наименование	Обозначение	Определение
Количество вещества	моль	моль	Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами частиц
Сила света	кандела	кд	Кандела равна силе света, испускаемого с поверхности площадью 1/600 000 м² полного излучателя в перпендикулярном направлении, при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении 101 325 Па
Дополнительные единицы			
Плоский угол	радиан	рад	Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу
Телесный угол	стерадиан	ср	Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы

II. Соотношения между некоторыми единицами систем СИ и СГС

Величина	СИ	СГС
Длина	метр (м)	10^2 см
Масса	килограмм (кг)	10^3 г
Время	секунда (с)	1 с
Сила электрического тока	ампер (А)	$\approx 3 \cdot 10^9$
Сила	ньютон (Н)	10^5 дин
Работа, энергия, количество тепла	джоуль (Дж)	10^7 эрг
Мощность, тепловой поток	ватт (Вт)	10^7 эрг/с
Давление, напряжение (механическое)	паскаль (Па)	10 дин/см^2
Динамическая вязкость	паскаль-секунда (Па·с)	10 дин·с/см^2
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду (м^2/с)	10^4 см^2/с
Коэффициент теплообмена (теплопередача)	ватт на квадратный метр (Вт/м^2)	10^3 эрг/(с·см^2)
Теплопроводность	ватт на метр-кельвин (Вт/(м·К))	10^5 эрг/(с·см·К)
Температуропроводность	квадратный метр на секунду (м^2/с)	10^4 см^2/с
Количество электричества	кулон (Кл)	$\approx 3 \cdot 10^9$
Электрический потенциал, напряжение (электрическое)	вольт (В)	$\approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$
Электрическое сопротивление	ом (Ом)	$\approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ с/см

III. Некоторые внесистемные единицы

Килограмм-сила (кгс)	$=9{,}80665$ Н (точно)
Килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см^2)	$=98066{,}5$ Па (точно)
Миллиметр водяного столба (мм вод. ст.)	$=9{,}80665$ Па
Миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.)	$=133{,}322$ Па
Бар (бар)	$=10^5$ Па
Атмосфера физическая (атм)	$=101324{,}72$ Па
Атмосфера техническая (ат)	$=98066{,}5$ Па (точно)
Лошадиная сила (л. с.)	$=735{,}499$ Вт

Калория международная (кал)	$=4,1868$ Дж (точно)
Астрономическая единица длины (а. е.)	$=1,49600 \cdot 10^{11}$ м
Световой год (св. год)	$=9,4605 \cdot 10^{15}$ м
Парсек (пк)	$=3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Электронвольт (эВ)	$=1,60219 \cdot 10^{-19}$ Дж
Пуаз (П) — единица динамической вязкости	$=0,1$ Па·с
Стокс (Ст) — единица кинематической вязкости	$=10^{-4}$ м²/с
Температура Цельсия t	$=T-T_0$,

где T — температура Кельвина, $T_0=273,15$ К. (По размеру градус Цельсия равен кельвину.)

IV. Множители и приставки СИ для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

	Приставка	Обозначение
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	гига	Г
$1\,000\,000 = 10^{6}$	мега	М
$1\,000 = 10^{3}$	кило	к
$100 = 10^{2}$	гекто	г
$10 = 10^{1}$	дека	да
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д
$0,01 = 10^{-2}$	санти	с
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$0,000\,001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$	нано	н
$0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	пико	п
$0,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	атто	а

Примечание. Приставки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы числовые значения величин находились в пределах 0,1 . . . 1000

Гинзбург Виталий Лазаревич,
Левин Лев Михайлович,
Сивухин Дмитрий Васильевич,
Яковлев Иван Алексеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Термодинамика и молекулярная физика

М., 1976 г., 208 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Гладнева*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 19.03. 1976 г. Подписано к печати 24.08. 1976 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 6,5. Условн. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 11,36. Тираж 90 000 экз. Цена книги 32 коп. Заказ № 148

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Сматрицировано в ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано в ордена Ленина типографии «Красный пролетарий».
Москва, Краснопролетарская, 16. Заказ № 1144.

